Technische Universität München
Zentrum Mathematik, M1
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Boris von Loesch

---

1. Übung zu *Nichtlineare Optimierung: Grundlagen* (WS 2010/2011)

Aufgabe 1.1 (Optimales Design eines Gebäudes): (ca. 8 Punkte)
Ein quaderförmiges Gebäude soll optimal dimensioniert werden. Bezeichne l die Länge, b die Breite, h die Höhe (über Grund) und t die Tiefe (unter Grund) des Gebäudes. Der Bauherr stellt folgende Anforderungen, wobei zur Vereinfachung die Dicke der Wände und der Böden bzw. Decken vernachlässigt wird:

(1) Das Gebäude soll mindestens so lang, aber höchstens doppelt so lang wie breit sein.

(2) Die Länge l des Gebäudes darf 40 m nicht überschreiten.

(3) Die Höhe h des Gebäudes über Grund darf dessen Länge nicht unterschreiten.

(4) Alle Stockwerke sollen eine einheitliche Höhe von mindestens 3,50 m haben.

(5) Mindestens 10%, aber höchstens 25% des Gebäudes sollen unter der Erde liegen.

(6) Der Boden des Erdgeschosses soll ebenerdig sein.

(7) Die durch alle Stockwerke des Gebäudes bereitgestellte Bodenfläche soll in der Summe mindestens 10.000 m^2 betragen.

(8) Die durchschnittlichen jährlichen Heizkosten werden mit 100 Euro pro m^2 der über Grund liegenden Außenfläche des Gebäudes angesetzt. Die jährlichen Gesamtkosten für Heizung sollen 500.000 Euro nicht überschreiten.

Das Gebäude soll nun unter den angegebenen Bedingungen so dimensioniert werden, dass die Menge des für den Bau des Gebäudes auszuhebenden Erdreichs minimal ist.

a) Schreiben Sie dieses Problem in Form eines restringierten Optimierungsproblems.

b) Bestimmen Sie einen zulässigen Punkt.

c) Beweisen Sie, dass eine optimale Lösung existiert (Diese müssen Sie nicht angeben!). Prüfen Sie dazu die Voraussetzungen von Satz 1.1.2 nach.

Aufgabe 1.2 (Quadratische Funktionen): (ca. 6 Punkte)
Eine quadratische Funktion $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei durch

$$q(x) := \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

gegeben, mit einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass A symmetrisch ist.

b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von q. Versuchen Sie dies, ohne die Funktion komponentenweise abzuleiten. Wie lautet gemäß (a) die Hessematrix, falls A nicht symmetrisch ist?

c) Sei A positiv definit, d.h. $x^T Ax > 0 \,\forall x \neq 0$, und $x^* := -A^{-1}b$. Zeigen Sie, dass x^* das globale Minimum von q ist.

Aufgabe 1.3 (Fehlende Abstiegsrichtungen): **(ca. 6 Punkte)**
Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) := y^2 - 3yx^2 + 2x^4.$$

a) Berechnen Sie die stationären Punkte von f.

b) Ausgehend von $(0,0)$ steigt die Funktion in jede Richtung an: Durch $\alpha_d(t) := td$ mit $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist eine Gerade durch $(0,0)$ und d gegeben. Zeigen Sie, dass für jedes d die Funktion $\phi_d(t) := f(\alpha_d(t))$ nach unten beschränkt ist und ein striktes lokales Minimum bei $t = 0$ hat.

c) Ist der Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum von f?

Aufgabe 1.4: **(ca. 6 Punkte)**

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Wenn x^* ein lokales aber kein globales Minimum von f ist, dann besitzt f neben x^* einen weiteren stationären Punkt.

b) Verlassen wir nun den $\mathbb{R}^1$. Gilt die Aussage aus (a) auch für die Funktion $f(x,y) := e^{3y} - 3xe^y + x^3$?

Abgabe:

- Bitte geben bis **Mittwoch, den 10.11.2010, 10 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.
- Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vom 10.11.2010 - 18.11.2010 besprochen.