Technische Universität München
Zentrum Mathematik, M1
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Boris von Loesch

---

2. Übung zu *Nichtlineare Optimierung: Grundlagen* (WS 2010/2011)

Aufgabe 2.1 (Komposition konvexer Funktionen): (ca. 4 Punkte)

a) Sei $g\colon X \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiter sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $g(X) \subseteq I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $f \circ g\colon x \in X \mapsto f(g(x)) \in \mathbb{R}$ konvex ist.

b) Folgern Sie hieraus, dass für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ die Funktion $h(x) := \|x\|^2$ konvex ist.

c) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass auf das monotone Wachstum von f im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 2.2 (Alternative Definition konvexer Funktionen): (ca. 5 Punkte)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus (0,1),\ (1-\lambda)x + \lambda y \in X. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn sie Bedingung (1) erfüllt.

b) Folgern Sie: Jede beschränkte und konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konstant.

Aufgabe 2.3: (ca. 3 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla f(x) \neq 0$. Weiter sei $s \in \mathbb{R}^n$ eine *Abstiegsrichtung von f in x*, d. h. es gelte $\nabla f(x)^T s < 0$.

Zeigen Sie, dass es dann $\tau > 0$ gibt mit

$$f(x + \sigma s) < f(x) \quad \text{für alle} \quad \sigma \in (0, \tau].$$

Aufgabe 2.4 (Gradientenverfahren mit fester Schrittweite): (ca. 7 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, für die eine feste Konstante $L > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten nun ein Gradientenverfahren analog zu Algorithmus 2.3.5. Hierbei werden in Schritt 3 die σ_k nicht mit der Armijo-Regel bestimmt, sondern stattdessen $\sigma_k = \alpha_k$ gewählt mit

$$\varepsilon \leq \alpha_k \leq \frac{(1-\varepsilon)}{L}.$$

Dabei ist $0 < \varepsilon < 1/(1+L)$ eine über den gesamten Algorithmus feste Konstante,

a) Zeigen Sie, dass für die durch den Algorithmus erzeugte Folge (x^k) gilt:

$$f(x^{k+1}) < f(x^k).$$

b) Beweisen Sie, dass der so modifizierte Algorithmus entweder mit einem stationären Punkt x^k abbricht oder eine unendliche Folge (x^k) erzeugt, deren Häufungspunkte stationäre Punkte von f sind.

Aufgabe 2.5 (MC): **(ca. 8 Punkte)**

Bewertung: -1/0/1 Punkte für falsche/keine/richtige Antwort. In der Gesamtwertung dieser Aufgabe können keine negativen Punkte erzielt werden, d. h. bei einer negativen Gesamtpunktzahl wird diese Aufgabe mit null Punkten bewertet.

In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stets eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

a) Für eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass g auf K ein Minimum annimmt, ist die Stetigkeit von g.
wahr ☐ **falsch** ☐

b) Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt: x^* ist genau dann stationärer Punkt von f, wenn $\nabla f(x^*)^T h \leq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. **wahr** ☐ **falsch** ☐

c) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann stationärer Punkt von f, wenn er lokales Minimum oder lokales Maximum von f ist. **wahr** ☐ **falsch** ☐

d) Gleichmäßig konvexe Funktionen sind strikt konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

e) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ ist gleichmäßig konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

f) Wenn f streng konvex ist, dann ist $\nabla^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
wahr ☐ **falsch** ☐

g) Ist $g\colon I \to \mathbb{R}$ konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist g^2 strikt konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

h) Jede streng konvexe Funktion besitzt ein (lokales=globales) Minimum.
wahr ☐ **falsch** ☐

Abgabe:

- Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 24.11.2010, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.
- Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vom 24.11.2010 - 2.12.2010 besprochen.