Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dennis Klöckner, M.Sc. Wintersemester 2013/14

First Order Primal-Dual Optimization Methods (Primal-duale Optimierungsmethoden erster Ordnung)

Übungsblatt 4

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Die *konvexe Hülle* von X ist definiert als der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die X enthalten, d.h.

$$\text{co } X = \bigcap \{C \colon C \subset \mathbb{R}^n \text{ konvex mit } X \subset C\}.$$

Sie kann äquivalent geschrieben werden als die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus X, d.h.

$$\text{co } X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \exists m \in \mathbb{N}, x_i \in X, \lambda_i \geq 0 : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \ \text{ und } \ x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\}.$$

Aufgabe 4.1 (Subdifferential des Maximums konvexer Funktionen):
Es seien $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ konvex für $i = 1, \ldots, m$, $f \colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ sei gegeben durch $f(x) := \max_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ und wir definieren die Indexmengen $I(x) := \{i \colon f_i(x) = f(x)\}$.

a) Zeigen Sie, dass f konvex ist und für das Subdifferential gilt, dass

$$\partial f(x) \supset \text{co} \bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x).$$

Für die umgekehrte Aussage seien in den folgenden Teilaufgaben nun $x \in \bigcap_{i=1}^{m} \text{int}\big(\text{dom}(f_i)\big)$ und $g \in \partial f(x)$.

b) Bestätigen Sie, dass $g \in \partial f(x)$ äquivalent dazu ist, dass $y = x$ Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) - g^T y$$

ist und folgern Sie daraus, dass dies wiederum äquivalent dazu ist, dass $\bar{w} := w_x := \big(x^T, f(x)\big)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ das Minimierungsproblem

$$\min_{w \in \mathbb{R}^{n+1}} (-g^T, 1)\ w \quad \text{u.d.N.} \quad w \in \bigcap_{i=1}^{m} \text{epi}(f_i) \tag{1}$$

löst.

c) Weisen Sie nach, dass für $i \notin I(x)$, der Normalenkegel $N_{\text{epi}(f_i)}(w_x)$ durch

$$N_{\text{epi}(f_i)}(w_x) = \{0\}$$

gegeben ist. Zeigen Sie weiter, dass sich der Normalenkegel für $i \in I(x)$ darstellen lässt als

$$N_{\text{epi}(f_i)}(w_x) = \{\sigma_i\big((g^i)^T, -1\big)^T : g^i \in \partial f_i(x),\ \sigma_i \geq 0\}.$$

Hinweis: Gehen Sie im Fall $i \in I(x)$ ähnlich zum Beweis der Existenz eines Subgradienten in Lemma 2.7 vor.

d) Weisen Sie nach, dass

$$\partial f(x) = \operatorname{co} \bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x)$$

gilt, indem Sie die Optimalitätsbedingungen von (1) und die Darstellung der Normalenkegel aus Teil c) benutzen.

Aufgabe 4.2 (Subdifferential einer eigentlichen und einer differenzierbaren Funktion):

a) Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ konvex und eigentlich und $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar. Folgern Sie, dass $\bar{x} \in \operatorname{dom}(f)$ genau dann das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + h(x) \tag{2}$$

löst, wenn $0 \in \partial f(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})$ erfüllt ist.

Hinweis: Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge. Sie können ohne Beweis verwenden, dass dann auch $\operatorname{ri}(K) \neq \emptyset$ gilt.

b) Es gelten die Voraussetzungen aus Teil a). Zusätzlich sei die eigentliche Funktion f nun darstellbar als $f(x) = f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ mit konvexen, eigentlichen Funktionen $f_{1/2}\colon \mathbb{R}^{n_{1/2}} \to \bar{\mathbb{R}}$, sodass $n = n_1 + n_2$. Begründen Sie, dass für $x_2 \in \operatorname{dom}(f_2)$ der Vektor $\bar{x}_1 \in \operatorname{dom}(f_1)$ genau dann Lösung von

$$\min_{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}} f(x) + h(x) \tag{3}$$

ist, wenn er auch das Problem

$$\min_{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}} f_1(x_1) + \nabla_{x_1} h(\bar{x}_1, x_2)^T x_1 \tag{4}$$

löst.

Aufgabe 4.3 (Kartesisches Produkt von Subdifferentialen):
Wir betrachten eine konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \bar{\mathbb{R}}$.

a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $\partial_{(x_1,x_2)} f(x_1, x_2) \subset \partial_{x_1} f(x_1, x_2) \times \partial_{x_2} f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ gilt.

b) Begründen Sie, dass die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen nicht erfüllt ist, durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.