Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dennis Klöckner, M.Sc.

Wintersemester 2013/14

First Order Primal-Dual Optimization Methods (Primal-duale Optimierungsmethoden erster Ordnung)

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (Konvex Konjugierte Funktionen):

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ konvex, eigentlich und positiv homogen, d.h. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann eine abgeschlossene, konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$f^* = \delta_K$$

gilt.

b) Wir betrachten $p, q \in [1, \infty]$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Außerdem sei $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, d.h. $\phi(-t) = \phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass

$$(\phi \circ \|\cdot\|_p)^* = \phi^* \circ \|\cdot\|_q$$

gilt und folgern Sie daraus, dass $\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2\right)^* = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$ folgt.

Hinweis: Sie können die Resultate aus Aufgabe 1.1 verwenden.

Aufgabe 5.2 (ADMM für koerzive Funktionen):
Es seien $f_{1/2}\colon \mathbb{R}^{n_{1/2}} \to \bar{\mathbb{R}}$ eigentliche, konvexe und unterhalbstetige Funktionen und wir betrachten das Problem

$$\min_{x_1,x_2} f_1(x_1) + f_2(x_2) \quad \text{u.d.N.} \quad A_1x_1 + A_2x_2 = b. \tag{1}$$

für $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n_1}, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$, and $b \in \mathbb{R}^m$. Außerdem seien f_1 und f_2 koerziv und die Slater-Bedingung erfüllt, d.h. es gibt $\hat{x}_1 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f_1)), \hat{x}_2 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f_2))$ mit $A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 = b$.

a) Zeigen Sie, dass dann ein zugehöriges KKT-Tupel $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda})$ des Problems (1) existiert.

b) Begründen Sie, dass für $\gamma > 0$ die Teilprobleme $\min\limits_{x_1} L^a(\gamma; x_1, x_2^k, \lambda^k)$ und $\min\limits_{x_2} L^a(\gamma; x_1^{k+1}, x_2, \lambda^k)$ lösbar sind.

Aufgabe 5.3 (ADMM für Summe l konvexer Funktionen):
Es seien $g_1, \ldots, g_l\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ eigentliche, konvexe, unterhalbstetige und koerzive Funktionen. Wir betrachten das Problem

$$\min_x \sum_{i=1}^{l} g_i(x). \tag{2}$$

a) Formulieren Sie dies als äquivalentes Problem indem Sie zusätzliche Variablen $y_i = x$ für $i = 1, \ldots, l$ einführen und damit die einzelnen Funktionen g_i entkoppeln.

b) Bringen Sie Problem (2) in die Standardform

$$\min_{x_1,x_2} f_1(x_1) + f_2(x_2) \quad \text{u.d.N.} \quad A_1x_1 + A_2x_2 = b,$$

mit geeigneten $x_{1/2}, f_{1/2}, A_{1/2}, b$ und formulieren Sie den ADMM Algorithmus. Behandeln Sie dabei voneinander unabhängige Teilprobleme getrennt und schreiben Sie die Lösungen der auftretenden nicht notwendigerweise differenzierbaren Teilprobleme in Form geeigneter Proximity Operatoren.

c) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen von Konvergenzsatz 3.4 erfüllt sind, wenn $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $\hat{x} \in \operatorname{ri}\big(\operatorname{dom}(\sum_i g_i)\big)$.

Aufgabe 5.4 (ADMM für Bildverarbeitungsmodell):
Wir betrachten erneut das Bildverarbeitungsmodell in der transformierten Form

$$\min_{x,y,z,w} \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_2 + \mu\|z\|_1 \quad \text{u.d.N.} \quad y_i = D_i x \ \forall i = 1, \dots, n, \ \ z = Bx - u, \ \ w = x, \ \ w \in [0,1]^n, \qquad (3)$$

mit den Variablen wie in Aufgabe 3.3.

a) Schreiben Sie Problem (3) in der Form

$$\min_{x_1,x_2} f_1(x_1) + f_2(x_2) \quad \text{u.d.N.} \quad A_1x_1 + A_2x_2 = b,$$

für geeignete Variablen $x_1 \in \mathbb{R}^{2n+m+n}, x_2 \in \mathbb{R}^n$, Funktionen $f_1 \colon \mathbb{R}^{2n+m+n} \to \bar{\mathbb{R}}, f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, Matrizen $A_1 \in \mathbb{R}^{(2n+m+n)\times(2n+m+n)}, A_2 \in \mathbb{R}^{(2n+m+n)\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{2n+m+n}$.

b) Formulieren Sie den ADMM Algorithmus für diesen Fall und benutzen Sie die Bezeichnungen und bereits berechneten Lösungen der Teilprobleme aus Aufgabe 3.3. Begründen Sie, dass die Voraussetzungen von Konvergenzsatz 3.4 erfüllt sind.