Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dennis Klöckner, M.Sc. Wintersemester 2013/14

First Order Primal-Dual Optimization Methods (Primal-duale Optimierungsmethoden erster Ordnung)

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (Moreau-Zerlegung):
Lösen Sie Aufgabe 6.3 von Übungsblatt 6.

Aufgabe 7.2 (Interpretation einer Fixpunktiteration):
Wir betrachten

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + g(x) \tag{1}$$

für eine stetig differenzierbare, konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine eigentliche, konvexe, unterhalbstetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn es für $\nu > 0$ die Fixpunktgleichung

$$\bar{x} = \operatorname{prox}_{\nu g}\left(\bar{x} - \nu\nabla f(\bar{x})\right) \tag{2}$$

löst.

Es sei $x^k \in \mathbb{R}^n$ die aktuelle Iterierte. Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration von (2)

$$x^{k+1} := \operatorname{prox}_{\nu g}\left(x^k - \nu\nabla f(x^k)\right),$$

äquivalent ist zum Updateschema

$$x^{k+1} := \operatorname{prox}_{\nu\left(g+\nabla f(x^k)^T(\,\cdot\, - x^k)\right)}(x^k), \tag{3}$$

indem Sie die Optimalitätsbedingungen beider den Proximity Operatoren zugrunde liegender Minimierungsprobleme betrachten. Wie kann eine Fixpunktiteration also interpretiert werden?

Aufgabe 7.3 (Fenchel-Dualität für LASSO):
Für $\mu > 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir das LASSO Regressionsproblem aus der Vorlesung

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \mu\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2, \tag{4}$$

und setzen $f(z) := \frac{1}{2}\|z - b\|_2^2$ und $g(x) := \mu\|x\|_1$.

a) Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ konvex und eigentlich. Für $\mu > 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $h_1(x) := \mu h(x)$ und $h_2(x) := h(x - b)$. Zeigen Sie, dass sich für $y \in \mathbb{R}^n$ die konvex Konjugierten berechnen lassen als

$$h_1^*(y) = \mu h^*\left(\frac{y}{\mu}\right),$$

und

$$h_2^*(y) = h^*(y) + b^T y.$$

b) Weisen Sie mit Teil a) und Aufgabe 5.1 nach, dass das Fenchel-duale Problem

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} -f^*(y) - g^*(-A^T y)$$

äquivalent zu

$$\min_{y \in C} \frac{1}{2}\|y\|^2 + b^T y,$$

mit $C := \{y \in \mathbb{R}^m : \|A^T y\|_\infty \leq \mu\}$ ist, indem Sie f^* und g^* berechnen. Gilt hier starke Dualität? Kann mit dem Fenchel primal-dualen Paar eine Sattelpunktsfunktion in Verbindung gebracht werden?