



---

1. Übungen zu *Linear Optimization* (WS 2009/2010)

Hausaufgaben (Abgabe am 26./27.10. bzw. 2./3.11. in den Übungen)

**Aufgabe 1.1 (Modellierung Produktionsplanung):** (ca. 6 Punkte)

Für die Produktion der Produkte P1 und P2 benötigt ein Unternehmen eine Maschine, die in jedem Monat 160 Stunden zur Verfügung steht. Eine Einheit von P1 kann in einer Stunde auf der Maschine gefertigt werden, für eine Einheit von P2 werden hingegen 3 Stunden benötigt. Rüst- und Umrüstzeiten fallen nicht an. Die Stückkosten liegen bei 4,- Euro für P1 bzw. bei 44,- Euro für P2. Auf dem Absatzmarkt lassen sich dafür Stückpreise von 11,- Euro bzw. 49,- Euro erzielen, wobei von P1 maximal 100 und von P2 maximal 40 Stück abgesetzt werden können.

- Stellen Sie lineare Programme mit dem Ziel der Gewinn- bzw. Umsatzmaximierung auf und bestimmen Sie die jeweiligen Optima.
- Da Umsatz- und Gewinnmaximierung in dieser Situation offensichtlich unvereinbare Ziele sind, wird entschieden, dasjenige Produktionsprogramm zu realisieren, bei dem beide Zielwerte zu einem maximalen Prozentsatz erreicht werden. Formulieren Sie das entsprechende lineare Optimierungsproblem, verwenden Sie dabei die Lösungen aus Teil a).

**Aufgabe 1.2:** (ca. 3 Punkte)

Zeigen Sie: Die Lösungsmenge eines LPs

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N} \quad Ax \leq b, \quad Dx = e$$

mit  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$  und  $e \in \mathbb{R}^p$  ist konvex.

**Aufgabe 1.3:** (ca. 4 Punkte)

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \quad (*)$$

mit  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein Problem vom Typ (\*) unbeschränkt ist (also der Optimalwert  $-\infty$  ist), dann gibt es ein  $1 \leq i \leq n$ , so dass das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} -x_i \quad \text{u.d.N} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

auch unbeschränkt ist.

## Tutoraufgaben

### Aufgabe 1.4:

(ca. 6 Punkte)

Im Folgenden sei ein lineares Program in natürlicher Form

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N} \quad Ax \leq b \quad (**)$$

mit  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$  gegeben. Der zulässige Bereich sei nicht leer.

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf Ihre Richtigkeit:

- a) Ein lineares Program vom Typ (\*\*) ist unbeschränkt (also der Optimalwert “ $-\infty$ ”), falls  $m < n$  ist. wahr  falsch
- b) Wenn  $m > n$  und  $A$  vollen Rang hat, ist (\*\*) lösbar. wahr  falsch
- c) Der zulässige Bereich eines LPs ist konvex. wahr  falsch
- d) Der zulässige Bereich eines LPs ist abgeschlossen. wahr  falsch
- e) Ein LP ist lösbar, wenn der zulässige Bereich beschränkt und nichtleer ist. wahr  falsch
- f) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und positiv definit, dann ist  $Ax \leq b$  äquivalent zu  $x \leq A^{-1}b$ . wahr  falsch

### Aufgabe 1.5 (Modellierung Verschnittminimierung):

(ca. 4 Punkte)

Eine Blechfabrik möchte aus einer 1300mm breiten Rolle Bleche verschiedener Breite schneiden. Insgesamt sollen folgende Teile produziert werden:

Gesamtlänge	Breite
mind. 400m	600mm
mind. 700m max. & 800m	340mm
700m	150mm

Hierbei darf die Gesamtlänge erreicht werden durch mehrere Stücke derselben Breite.

Formulieren Sie die Aufgabe, den Verschnitt zu minimieren, als lineares Optimierungsproblem.

**Tipp:** Schauen Sie sich die möglichen Schnittkombinationen an!

### Hinweise:

- Webseite zur Vorlesung:  
<http://www-m1.ma.tum.de/bin/view/Lehrstuhl/MU1brichLinearOptWS0910>
- In den Tutorübungen werden die Aufgaben besprochen, sowie Fragen zur Vorlesung diskutiert. Zusätzlich bietet sich Ihnen hier auch die Möglichkeit Ihre Lösungsansätze vorzuführen. Wir erwarten von Ihnen eine aktive Mitarbeit in den Übungen!
- Die Übungen sind zweistündig und finden **alle zwei Wochen** statt, der erste Termin ist in der zweiten (Gruppe 1-3) bzw. dritten (Gruppe 4-6) Vorlesungswoche.
- Die Einteilung in die Übungen erfolgt über MyTum ab Mittwoch, den 16.10.2009. Nähere Informationen finden Sie auf der Webseite.
- Bitte geben Sie die Hausaufgaben in Teams von bis zu drei Personen in Ihrer jeweiligen Übung unter Verwendung des bereitgestellten Deckblattes ab.
- Sie sollten am Ende des Semesters mindestens 50% der erreichbaren Hausaufgabenpunkte bekommen haben.