Technische Universität München
Zentrum Mathematik
M1 - Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

---

2. Übungen zu *Linear Optimization* (WS 2009/2010)

Hausaufgaben (Abgabe am 9./10.11. bzw. 16./17.11. in den Übungen)

Aufgabe 2.1 (TSP Subtour-Eliminationsbedingung): **(ca. 6 Punkte)**
In der Vorlesung wurden zwei Möglichkeiten angegeben, das TSP (Travelling Salesman Problem) zu formulieren, diese unterschieden sich nur anhand der Bedingungen zur Elimination von Subtouren. Eine dritte Möglichkeit ist die folgende:

OBdA gehen wir davon aus, dass genau die ersten $k-1$ Kanten w_i entweder von s_1 wegführen oder ihr Ziel in s_1 haben, also

$$\begin{aligned} a_i = 1 \text{ oder } b_i = 1 \text{ für } i < k, \\ a_i \neq 1 \text{ und } b_i \neq 1 \text{ für } i \geq k. \end{aligned}$$

Man erweitert das Problem um $m-1$ Variablen $u_2, \dots, u_m$ und fügt folgende Nebenbedingungen hinzu:

$$u_{a_j} - u_{b_j} + m x_j \leq m - 1, \; j = k, \dots, n. \tag{N}$$

a) Zeigen Sie, dass es zu keiner Tour, die eine Subtour enthält, $u_2, \dots, u_m$ gibt, so dass (N) gilt.

b) Zeigen Sie, dass es zu jeder Tour, die **keine** Subtour enthält, $u_2, \dots, u_m$ gibt, so dass (N) gilt.

c) Welche Vor- bzw. Nachteile haben diese Subtour Eliminationsbedingungen.

Zur Notation: Gegeben seien m Städte $s_1, \dots, s_m$ und gerichtete Kanten $w_1, \dots, w_n$. Eine Kante w_j läuft von Stadt a_j zur Stadt b_j. Eine Tour oder Rundreise ist ein Vektor $x \in \{0,1\}^n$ mit

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ a_j = s_i}} x_j = 1, \qquad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ b_j = s_i}} x_j = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

Aufgabe 2.2: **(ca. 7 Punkte)**
Finden Sie Bedingungen an s und t, die notwendig und hinreichende sind, so dass das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min_{x \in \mathbb{R}^2} & x_1 - t x_2 & & \\ & s x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) keine zulässige Punkte besitzt,

b) unbeschränkt ist, also der Optimalwert des Problems „$-\infty$“ ist,

c) mindestens eine Optimallösung besitzt,

d) genau eine Optimallösung besitzt.

Aufgabe 2.3: **(ca. 5 Punkte)**
Wie groß muss die Anzahl der Nebenbedingungen m mindestens sein, damit der zulässige Bereich $X \neq \emptyset$ eines LPs der Form $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ beschränkt ist (Beweis!).

Aufgabe 2.4: **(ca. 5 Punkte)**
Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf Ihre Richtigkeit, bitte geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antworten. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Nichtbeantwortete Fragen geben keinen Punktabzug.

a) Gegeben sei ein lösbares kürzeste Wege Problem. Bei der LP Formulierung des Problems (Vorlesung: (1.4)) existiert immer eine Lösung x mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. wahr ☐ falsch ☐

b) Jedes lokale Minimum eines LPs ist globales Minimum. wahr ☐ falsch ☐

c) Ein LP hat entweder eine, keine oder unendlich viele Lösungen. wahr ☐ falsch ☐

d) Ein LP der Form
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \leq b$$
mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $e \in \mathbb{R}^p$ kann in die Form
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad \tilde{A}x = \tilde{b}\ , x \geq 0$$
mit $\tilde{A}x \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times n}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ gebracht werden. wahr ☐ falsch ☐

e) Ein LP der Form
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \leq b,\ Dx = e$$
mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $e \in \mathbb{R}^p$ kann in die Form
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad \tilde{A}x \leq \tilde{b}$$
mit $\tilde{A}x \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times n}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ gebracht werden. wahr ☐ falsch ☐

Präsenzaufgabe

Aufgabe 2.5 (Graphisches Lösen von 2-D Problemen): **(ca. 6 Punkte)**
Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^2}\ x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -3x_1 - 2x_2 \leq -6 \\ & x_1 - x_2 \leq 8 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1/2 \end{aligned} \tag{$\circledcirc$}$$

a) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich X von $\circledcirc$ als Schnitt der Mengen, die durch die einzelnen Nebenbedingung beschrieben werden.

b) Zeichnen Sie die Gradienten der Nebenbedingungen in einen Randpunkt der durch diese Nebenbedingung beschriebenen Menge ein.

c) Zeichnen Sie die Gerade $x_1 + x_2 = \gamma$ mit $\gamma = 2$ und $\gamma = 1$ in Ihr Diagramm ein.

d) Bestimmen Sie nun graphisch die Lösung von $\circledcirc$.

e) Nutzen Sie die Information aus Ihrer Grafik, um die exakte Lösung zu berechnen.