Technische Universität München
Zentrum Mathematik
M1 - Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

---

3. Übungen zu *Linear Optimization* (WS 2009/2010)

Hausaufgaben (Abgabe am 23./24.11. bzw. 30.11./01.12. in den Übungen)

Aufgabe 3.1: **(ca. 6 Punkte)**
Gegeben sei das zweidimensionale Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \min_{x\in\mathbb{R}^2} & x_1 - \frac{1}{3}x_2 & & \\ & x_1 - x_2 & \geq & -1 \\ & x_1 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Optimallösung x^* graphisch.

b) Bei der numerischen Lösung eines Optimierungsproblems können die Zahlen i. A. nicht exakt codiert werden. Nehmen Sie an, dass der Zielfunktionsvektor $c = (1, -\frac{1}{3})^T$ nicht exakt gespeichert wird, sondern in der Form $c = (1, -\frac{1}{3} + \xi)^T$, mit einem Fehler $\xi \in \mathbb{R}$. Wie groß darf $|\xi|$ maximal werden, damit Sie trotzdem dieselbe Optimallösung erhalten wie bei exakter Rechnung?

c) Formulieren Sie das Problem in Standardform (Vorlesung: (2.3)).

d) Wir verwenden nun die Form aus Aufgabenteil c). Wieder nehmen wir an, dass der Vektor $\tilde{c}$ nicht exakt gespeichert wird, sondern auf die Komponente, die zu x_2^+ gehört, ein Fehler von $\xi = -10^{-8}$ addiert wird. Wie lautet nun die Lösung des Optimierungsproblems? (Beweisen Sie Ihre Aussage!)

Aufgabe 3.2 (Alternative Eckendefinition): **(ca. 6 Punkte)**
Gegeben sei die folgende Definition einer Ecke eines Polyeders X:

$x \in X$ heißt Ecke des Polyeders X, wenn es sich **nicht** als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $x_1, x_2 \in X$ darstellen läßt, also $x \neq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $0 < \lambda < 1$.

Zeigen Sie, dass diese Definition für den Fall $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ äquivalent ist zu Definition 2.7.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3.3 (Entartete Ecken in 2-D und 3-D): **(ca. 4 Punkte)**

a) Bestimmen Sie (ggf. mit Hilfe einer Zeichnung) alle Ecken des zulässigen Bereichs

$$X_a := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 1,\, 2x_1 + x_2 \geq 2,\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\right\}.$$

Welche Ecken sind entartet?

b) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich

$$X_b := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1 + x_3 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

und bestimmen Sie alle Ecken. Welche Ecken sind entartet?

c) Welchen wichtigen Unterschied gibt es zwischen den entarteten Ecken aus Aufgabenteil a) und b)? Gilt das auch allgemein?[1]

Aufgabe 3.4: **(ca. 5 Punkte)**

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit, bitte geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antworten. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Nichtbeantwortete Fragen geben keinen Punktabzug.

a) Es sei $m \leq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $a_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, m$ und $b \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

wahr ☐ falsch ☐

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H(a_i, b_i)\right) \geq n - m.$$

Achtung: In a) und b) bezeichnet dim(...) die Dimension eines affinen Raumes.

b) Es sei $m \leq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

wahr ☐ falsch ☐

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H(a_i, b_i)\right) = n - m.$$

c) Wenn ein LP in natürlicher Form unendlich viele Lösungen hat, ist das Innere des Lösungspolyeders nicht leer. wahr ☐ falsch ☐

d) Gegeben sei ein LP in natürlicher Form. Wenn das Problem unendlich viele Lösungen hat, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $c = \alpha a_i$. wahr ☐ falsch ☐

e) Bei LPs mit nichttrivialen Gleichungsnebenbedingungen, die in natürliche Form überführt worden sind, ist jede Ecke entartet. wahr ☐ falsch ☐

[1] Diese Frage brauchen Sie nicht schriftlich beantworten.