Technische Universität München
Zentrum Mathematik
M1 - Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

---

4. Übungen zu ***Linear Optimization*** (WS 2009/2010)

Hausaufgaben (Abgabe am 07./08.12. bzw. 14.12./15.12. in den Übungen)

Aufgabe 4.1 (Eigenschaften der L^1- und L^∞-Approximation): (ca. 6 Punkte)
Wir betrachten das L^1-Approximationsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_1 \tag{L^1-AP}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $m > n$.

a) Formulieren Sie das Problem (L^1-AP) als lineares Programm.

Im Folgenden habe A vollen Spaltenrang und die Probleme (L^1-AP) bzw. (1.1) seien lösbar[1].

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a) die Existenz einer Lösung x^* von (L^1-AP), für die eine Indexmenge $\mathcal{J}$ mit $|\mathcal{J}| \geq n$ existiert mit $a_i^T x^* = b_i$ für alle $i \in \mathcal{J}$.

c) Wir wechseln nun von der 1-Norm in die ∞-Norm (Vorlesung (1.1)). Zeigen Sie die Existenz einer Lösung x^* von (1.1), in welcher der maximale Fehler $\|Ax^*-b\|_\infty$ in mindestens $n+1$ Komponenten des Vektors $e = |Ax^*-b|$ angenommen wird.

Aufgabe 4.2 (Charakterisierung irredundanter Gebiete): (ca. 7 Punkte)
Sei mit der Notation der Vorlesung $X := \bigcap_{i=1}^m H^-(a_i, b_i)$ der zulässige Bereich eines LPs. Man spricht auch von einer $\mathcal{H}$-Darstellung des Polyeders X. Die $\mathcal{H}$-Darstellung von X heißt *irredundant*, falls für jedes $j \in \{1,\ldots,m\}$

$$X \neq \bigcap_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{m} H^-(a_i, b_i)$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass die $\mathcal{H}$-Darstellung eines volldimensionalen Polyeders X (d.h. $\mathrm{int}(X) \neq \emptyset$)[2] genau dann irredundant ist, wenn für alle $i, j \in \{1,\ldots,m\}$, $i \neq j$, ein Punkt $x' \in X$ existiert mit $a_i^T x' = b_i$ und $a_j^T x' < b_j$.

b) Nehmen Sie an, es steht Ihnen eine Routine $\mathcal{A}$ zur Verfügung, die Minimallösung und Minimalwert eines beliebigen gegebenen LPs bestimmt. Geben Sie einen Algorithmus an, der mithilfe von $\mathcal{A}$ entscheidet, ob die obige $\mathcal{H}$-Darstellung von X irredundant ist.

---

[1] Die Lösbarkeit läßt sich in diesem Fall durch einen Kompaktheitsschluss leicht zeigen.
[2] $\mathrm{int}(X)$ bezeichne das Innere von X.

Aufgabe 4.3 (Programmieraufgabe: Ecken finden): **(ca. 7+2 Punkte)**
In dieser Aufgabe soll der Algorithmus aus Abschnitt 2.10.2 in Matlab programmiert werden. Ausgehend von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\text{Rang}(A) = n$, Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ und einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ soll ein Eckpunkt $\bar{x}$ wie in Algorithmus 2.10.2 gefunden werden oder die Meldung zurückgegeben werden, dass das Problem unbeschränkt ist.

a) Implementieren Sie den Algorithmus in Matlab, indem Sie eine Routine

```
x = findeEcke(A,b,c,x)
```

schreiben. Testen Sie `findeEcke` an dem zulässigen Bereich, der durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 &\leq -1 & \qquad -x_1 + x_3 &\leq -1 \\ -x_3 &\leq 0 & x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

gegeben ist. Verwenden Sie als Zielfunktionsvektor $c^0 = (0,0,0)^T$ und $c^1 = (0,1,0)^T$ jeweils mit den Startpunkten $x^0 = (3,-2,1)^T$ und $x^1 = (1,0,0)^T$. Bei c^0 wird unabhängig vom Startpunkt die Ecke $\bar{x} = (1,1,0)^T$ zurückgegeben, bei der Zielfunktion c^1 die Meldung, dass das Problem unbeschränkt sei.
Tipp: Verwenden Sie den Befehl `null(...)` um sich den Kern berechnen zu lassen.

b) Denken Sie sich ein LP aus, welches den obigen Voraussetzungen genügt, von dem Sie denken, dass nicht korrekte Implementierungen des Algorithmus fehlschlagen. Testen Sie Ihre Implementierung an dem Problem.

* c) Versuchen Sie ohne Formatiertricks den Algorithmus in weniger als 30 Zeilen zu implementieren.

Schicken Sie bitte Ihre Implementierung, Ihr Beispiel und die Ausgaben von Aufgabenteil a) und b) an die Emailadresse `vloesch@ma.tum.de`. Vergessen Sie nicht Ihre Namen und die Gruppennummer dazuzuschreiben.

Aufgabe 4.4: **(ca. 4 Punkte)**
Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit, bitte geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antworten. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Nichtbeantwortete Fragen geben keinen Punktabzug.

a) Wenn ein LP in natürlicher Form lösbar ist, dann liegt mindestens eine Lösung in einer Ecke des zulässigen Bereichs. wahr ☐ falsch ☐

b) Gegeben sei ein LP in natürlicher Form mit einer Lösung x^*, die in einer nicht-entarteten Ecke liegt. Wenn die in x^* inaktiven Nebenbedingungen abgeändert werden, so dass x^* weiterhin zulässig bleibt, dann ist x^* auch Lösung des geänderten Problems. wahr ☐ falsch ☐

c) Sei x^* eine Lösung eines LPs in natürlicher Form, die in einer nicht-entarteten Ecke liegt. Die zu x^* gehörigen Lagrange-Multiplikatoren sind eindeutig. wahr ☐ falsch ☐

d) Gegeben sei ein lineares Minimierungsproblem in natürlicher Form mit einer nicht-entarteten Ecke $\bar{x}$. Weiter seien $\bar{\lambda}_i \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$c + \sum_{i\in\mathcal{A}(\bar{x})} \bar{\lambda}_i a_i = 0.$$

Wenn ein $\lambda_i < 0$ ist, dann gibt es einen Vektor v_i mit $v_i^T a_i < 0$ und $\tau > 0$ mit $A(\bar{x} + \tau v_i) \leq b$ und $c^T(\bar{x} + \tau v_i) < c^T\bar{x}$. wahr ☐ falsch ☐