Technische Universität München
Zentrum Mathematik
M1 - Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

---

6. Übungen zu *Linear Optimization* (WS 2009/2010)

Hausaufgaben (Abgabe am 18./19.01. bzw. 25.01./26.01. in den Übungen)

Aufgabe 6.1: **(ca. 4 Punkte)**

Betrachten Sie das LP

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \; & c^T x + d^T y \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax + By \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Stellen Sie das duale LP auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

b) Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Aufgabe 6.2 (Spieltheorie): **(ca. 12 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir einen speziellen Typ von Spielen: Zwei Spieler führen in jeder Runde jeweils eine Aktion aus. Je nach Aktion (und ggf. einem Zufallsereignis) gewinnt einer der Spieler die Runde oder es gibt ein unentschieden. Am Ende der Runde gibt der Verlierer dem Gewinner einen Gewinn einer bestimmten Höhe. Ein Beispiel dafür ist das Spiel Stein-Schere-Papier, bei dem der Gewinner einen Euro bekommt. Wir tabellieren den Gewinn von Spieler 1 je nach getroffener Entscheidung:

Spieler 1\ Spieler 2	Stein	Schere	Papier
Stein	0	1	-1
Schere	-1	0	1
Papier	1	-1	0

Aus der Tabelle kann nun eine Auszahlungsmatrix G gemacht werden und die Auszahlung kann durch Multiplikation ermittelt werden, z.B. wenn Spieler 1 Papier und Spieler 2 Schere wählt:

$$(0,0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Allgemein wählt jeder Spieler pro Runde eine Aktion aus den endlichen Mengen A_1 bzw. A_2, diese Mengen müssen nicht zwangsläufig gleichmächtig sein. Zusätzlich kann in jeder Runde noch ein Zufallsereignis $\omega \in \Omega$ das Ergebnis beeinflussen, z.B. ein Würfelwurf. Gegeben sei eine Funktion $\phi : A_1 \times A_2 \times \Omega \to \mathbb{R}$, welche die Höhe der Auszahlung an Spieler 1 zurückgibt. In $G \in \mathbb{R}^{|A_1| \times |A_2|}$ stehen nun die Erwartungswerte des Gewinns. Sei z.B. Ω eine diskrete Ereignismenge, dann ist

$$g_{ij} = \sum_{\omega \in \Omega} \phi(a_{1,i}, a_{2,j}, \omega) P(\{\omega\})$$

mit $a_{1,i}$ dem i-ten Element aus A_1 und $a_{2,j}$ dem j-ten Element aus A_2.

a) Betrachten Sie folgendes Spiel: Jeder Spieler wählt eine ganze Zahl c_i zwischen 1 und 3. Nun wird zufällig eine weitere ganze Zahl z zwischen -1 und 2 bestimmt. Gewonnen hat Spieler 1, wenn die Ungleichung $|z + c_2 - c_1| < |z + c_1 - c_2|$ erfüllt ist. Bei Gleichheit wird das Spiel unentschieden gewertet, sonst hat Spieler 2 gewonnen. Die Auszahlung pro Spiel beträgt $c_2 \cdot c_1$ Euro. Stellen Sie die 3×3 Auszahlungsmatrix $\hat{G}$ auf.

b) Um solche Spiele zu analysieren, geht man davon aus, daß die Spieler viele Runden hintereinander spielen. Eine *Strategie* von Spieler $j \in \{1, 2\}$ ist ein Vektor aus der Menge

$$S^j := \left\{ s \in \mathbb{R}^{|A_j|} \mid s \geq 0, \sum_{i=1}^{|A_j|} s_i = 1 \right\},$$

der angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spieler sich für eine Aktion entscheidet. Die Strategie von Spieler 1 sei $\hat{x} = (0, 0.5, 0.5)^T$, er wählt also in jedem Spiel zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder $c_1 = 2$ oder $c_1 = 3$. Formulieren Sie ein lineares Programm, dessen Lösung eine optimale Gegenstrategie y für Spieler 2 ist, d.h. die den zu erwartenden Verlust von Spieler 2 minimiert.

Im Folgenden sei $G \in \mathbb{R}^{|A_1| \times |A_2|}$ eine beliebige Auszahlungsmatrix.

c) Zeigen Sie, dass zu jeder Strategie $\hat{x} \in S^1$ von Spieler 1 eine optimale Gegenstrategie $y \in S^2$ existiert mit $y_i = (\delta_{ik})_{i=1,\dots,|A_2|}$ für ein $k \in \{1, \dots, |A_2|\}$.

d) Eine optimale Strategie für Spieler 1 bei optimalem Gegenspiel ist Lösung des Problems

$$\max_{x \in S^1} \min_{y \in S^2} x^T G y. \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Teil c), dass jede Lösung x^* von (1) eine Lösung von

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & -z \\ \text{u.d.N.} \quad & z - \sum_{i=1}^{|A_1|} g_{ij} x_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, |A_2| \\ & \sum_{i=1}^{|A_1|} x_i = 1, \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

ist mit $z^* = \min_{y \in S^2} (x^*)^T G y$ und umgekehrt eine Lösung (x^*, z^*) des LPs auch (1) löst.

e) Verwenden Sie nun das lineare Program aus Teil d) und Dualität um das *Minimax-Theorem* zu zeigen:

Es existieren Strategien $x^* \in S^1$ und $y^* \in S^2$ mit $\max_{x \in S^1} x^T G y^* = \min_{y \in S^2} (x^*)^T G y$.

Tipp: Teilen Sie den Vektor λ des dualen Problems geeignet auf und bringen Sie das Problem in eine ähnliche Form wie (2), indem Sie Variablen reduzieren.

f) Das Minimax-Theorem wird häufig in einer anderen Form formuliert:

$$\max_{x \in S^1} \min_{y \in S^2} x^T G y = \min_{y \in S^2} \max_{x \in S^1} x^T G y \tag{3}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Formulierungen.

g) Ein Spiel ist *fair*, wenn

$$\max_{x \in S^1} \min_{y \in S^2} x^T G y = \min_{y \in S^2} \max_{x \in S^1} x^T G y = 0$$

ist. Zeigen Sie, dass symmetrische Spiele, also Spiele für die $G = -G^T$ ist, fair sind. Verwenden Sie dazu das *Minimax*-Theorem.

Aufgabe 6.3: **(ca. 5 Punkte)**

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit, bitte geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antworten. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Nichtbeantwortete Fragen geben keinen Punktabzug.

a) Ein Punkt x^* ist genau dann Lösung eines LPs in natürlicher Form, wenn x^* ein KKT-Punkt ist. wahr ☐ falsch ☐

b) $x^* \in X$ ist **keine** Lösung eines LPs in natürlicher Form, wenn Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ existieren mit $(Ax^* - b)^T \lambda^* = 0$ und $\lambda_i^* < 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, m\}$. wahr ☐ falsch ☐

c) Sei x^* Lösung eines LPs in natürlicher Form. Der Vektor der Lagrangemultiplikatoren in x^* ist Lösung des dualen Problems. wahr ☐ falsch ☐

d) Gegeben seien ein LP in natürlicher Form und das dazu duale Problem DLP. Wenn das LP unbeschränkt ist, dann ist der zulässige Bereich von DLP leer. wahr ☐ falsch ☐

e) Wenn x^* die eindeutige Lösung eines LPs ist, dann hat das dazu duale Problem auch genau eine Lösung λ^*. wahr ☐ falsch ☐

✻ Wir wünschen Ihnen frohe Festtage und einen guten Rutsch ins neue Jahr! ✻