Technische Universität München
Zentrum Mathematik
M1 - Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

PK. Übungen zu *Linear Optimization* (WS 2009/2010)

Probeklausur

Aufgabe PK.1: **(ca. 5 Punkte)**

Auf einem Schienennetz mit n Bahnhöfen soll Milch transportiert werden. Dabei gibt es eine Reihe von Bahnhöfen, in denen ein Bedarf $b_i \geq 0$ an Milch vorliegt. An den anderen Bahnhöfen gilt $b_i < 0$, da hier ein Milchüberschuss produziert wird. Wir setzen voraus, dass die Gesamtnachfrage gleich dem Gesamtangebot ist ($\sum_{i=1}^n b_i = 0$). Auf jeder direkten Verbindung von Bahnhof i nach Bahnhof j gibt es eine Kapazitätsschranke l_{ij} zu beachten und die Transportkosten betragen c_{ij}.
Hinweis: Im Allgemeinen ist $c_{ij} \neq c_{ji}$ und $l_{ij} \neq l_{ji}$.

Formulieren Sie ein LP zur Bestimmung eines kostenminimalen Transportplans, so dass an allen Bahnhöfen der Bedarf an Milch gedeckt wird.

Lösung PK.1:

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{u.d.N.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad i = 1,\dots,n \\
& 0 \leq x_{ij} \leq l_{ij} \quad i,j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

Aufgabe PK.2: **(ca. 14 Punkte)**

Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^3} \quad & x_3 - x_1 - x_2 \\
\text{u.d.N.} \quad & x_2 \leq 6 \\
& x_3 \leq 9 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 24 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Bestimmen Sie ausgehend von $\bar{x} = (4,1,0)^T$ eine Ecke des zulässigen Bereichs mit dem dazu in der Vorlesung eingeführten Algorithmus.

b) Zeigen Sie, dass $x^0 = (0,6,6)^T$ eine Ecke des zulässigen Bereichs ist.

c) Bestimmen Sie ausgehend von x^0 mithilfe des dualen Simplexalgorithmus eine Optimallösung des LPs. Falls Sie mehrere Abstiegskanten $s^{k,j}$ zur Auswahl haben, wählen Sie diejenige, bei der das zugehörige λ_j^k am negativsten ist.

Lösung PK.2: Das Problem in natürlicher Form:

$$\min_x \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T x \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: b.$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 14 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq b \Rightarrow \mathcal{A}(\bar{x}) = \{3, 7\}$$

$\bar{x}$ ist zulässig. Verwende Algorithmus 2.10.2

$x^0 = \bar{x}$

1. $$A_{\mathcal{A}(\bar{x})} w^0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} w^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow w_3^0 = 0, \quad w_1^0 - w_2^0 = 0 \Leftrightarrow w^0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow w^0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern}(A_{\mathcal{A}(\bar{x})})$$

2. $$c^T w^0 = -2 < 0 \Rightarrow v^0 := w^0$$

$$A_{I(x^0)} v^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \nleq 0$$

4. $$t_0 = \min \left\{ \frac{6-1}{1}, \frac{24-14}{5} \right\} = 2$$

$$x^1 = x^0 + t_0 v^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\operatorname{Rang}(A_{\mathcal{A}(x^1)}) \geq \operatorname{Rang}(A_{\mathcal{A}(x^0)}) = 2$

$\Rightarrow x^1$ ist Ecke.

b) $Ax^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \\ 24 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \leq b \Rightarrow x^0$ zulässig, $\mathcal{A}(x^0) = \{1, 4, 5\}$

Da $\det(A_{\mathcal{A}(x^0)}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$ folgt

$\operatorname{span}\{a_i \mid i \in \mathcal{A}(x^0)\} = 3$ und damit ist x^0 eine Ecke.

c)

1. $A^T_{\mathcal{A}(x^0)} \lambda^0_{\mathcal{A}(x^0)} = -c \iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \lambda^0_{\mathcal{A}(x^0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\iff \lambda^0_{\mathcal{A}(x^0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \not\geq 0$

3. $j = 3$

$A_{\mathcal{A}(x^0)} s^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} s^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\iff s^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

4. $A_{I(x^0)} s^0 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$

5.

$t_0 = \min\left\{ \frac{15}{5/2}, \frac{6}{3/2} \right\} = \min\{6, 4\}$

$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Iteration $\mathcal{A}(x^1) = \{1, 4, 7\}$

1. $A^T_{\mathcal{A}(x^1)} \lambda^1_{\mathcal{A}(x^1)} = -c \iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \lambda^1_{\mathcal{A}(x^1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\iff \lambda^1_{\mathcal{A}(x^1)} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \geq 0 \implies x^1$ ist Lösung

Aufgabe PK.3: **(ca. 11 Punkte)**

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Bei einer negativen Gesamtpunktzahl wird diese Aufgabe mit Null Punkten gewertet.

Notation: Wenn nicht anders gesagt, ist in dieser Aufgabe ein LP stets in natürlicher Form:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \leq b$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$; der zulässige Bereich sei $X := \{x \,|\, Ax \leq b\}$.

a) Es gibt lösbare LPs, bei denen es aber keine optimale Ecke gibt. **wahr** ☒ **falsch** ☐

b) Eine Kante eines zulässigen Bereichs verbindet immer zwei Ecken. **wahr** ☐ **falsch** ☒

c) Der zu einem Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ gehörige Polarkegel K° ist abgeschlossen und konvex. **wahr** ☒ **falsch** ☐

d) Sei $n > 1$ und der zulässige Bereich nicht leer. Wenn ein $i \in \{1, \dots, m\}$ existiert mit $c = -a_i$, dann hat das LP unendlich viele Lösungen. **wahr** ☐ **falsch** ☒

e) Im $\mathbb{R}^1$ gibt es genau drei unterschiedliche nichtleere Kegel. **wahr** ☐ **falsch** ☒

f) (x^*, λ^*) ist ein KKT-Paar eines Problems in natürlicher Form genau dann, wenn gilt $x^* \in X$, $\lambda^* \geq 0$, $c + A^T\lambda^* = 0$ und $\lambda^*_{\mathcal{I}(x^*)} = 0$. **wahr** ☒ **falsch** ☐

g) $x^* \in X$ ist Lösung eines LPs, wenn ein $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$A^T\lambda^* = -c,\ \lambda^* \geq 0,\ (b - Ax^*)^T\lambda^* \leq 0.$$

wahr ☒ **falsch** ☐

h) Das KKT-System eines LPs kann äquivalent in das KKT-System des zugehörigen dualen Problems umgeformt werden. **wahr** ☒ **falsch** ☐

i) Wenn ein LP zulässige Punkte hat, kann das duale Problem nicht unbeschränkt sein. **wahr** ☒ **falsch** ☐

j) Das Problem des Kreisens beim dualen Simplexalgorithmus kann nur bei Problemen mit entarteten Ecken auftreten. **wahr** ☒ **falsch** ☐

k) Man kann das Simplexverfahren verwenden, um einen zulässigen Punkt eines LPs zu finden. **wahr** ☒ **falsch** ☐

Lösung PK.3: Hinweise:

a) $\min_{x\in\mathbb{R}^2} x_1 \quad$ u.d.N. $\quad x_1 \geq 0$.

b) Kanten können auch Strahlen oder Geraden sein, siehe Satz 2.7.6.

c) Folgt direkt aus der Definition.

d) $\min_{x\in\mathbb{R}^2} x_1 \quad$ u.d.N. $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_2 \leq 0$

e) Die Mengen $\{0\}$, $\{x|x > 0\}$, $\{x|x \geq 0\}$, $\{x|x < 0\}$, $\{x|x \leq 0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind Kegel im $\mathbb{R}^1$.

f) Direkte Folgerung aus den KKT-Bedingungen

g) Es gilt $b - Ax^* \geq 0$ und $\lambda^* \geq 0$. Aus $(b - Ax^*)^T\lambda^* \leq 0$ folgt also direkt $(b - Ax^*)^T\lambda^* = 0$.

h) Siehe Beweis des starken Dualitätsatzes

i) Folgt aus dem schwachen Dualitätssatz

j) siehe Skript

k) Durch Lösen des Phase-1-Problems mit Hilfe des Simplexverfahrens.

Aufgabe PK.4: **(ca. 10 Punkte)**

Wir betrachten das LP

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X := \{x \,|\, Ax = b, x \geq 0\},$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: $x^* \in X$ ist eine Optimallösung des LPs genau dann, wenn $s^* = 0$ eine Optimallösung des LPs

$$\min_s c^T s \quad \text{u.d.N.} \quad As = 0,\ s_{\mathcal{A}(x^*)} \geq 0, \quad \mathcal{A}(x^*) := \{i \in \{1,\dots,n\} \,|\, x_i^* = 0\}$$

ist

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Ein Punkt $x^* \in X$ ist genau dann Lösung des LPs, wenn $c \in T(X, x^*)$ gilt.

Lösung PK.4:

a) Die Aussage ist wahr. Beweis:

„$\Leftarrow$“: Sei $s^* = 0$ eine Lösung des zweiten Problems. Wenn x^* nicht Lösung wäre, dann existiert ein x mit

$$c^T x < c^T x^*,\ Ax = b,\ x \geq 0$$

Für $s := x - x^*$ gilt dann $c^T s < 0$, $As = 0$ und $s_{\mathcal{A}(x^*)} = x_{\mathcal{A}(x^*)} - x^*_{\mathcal{A}(x^*)} \geq 0$ wegen $x^*_{\mathcal{A}(x^*)} = 0$. Damit ist s ein zulässiger Punkt des zweiten Problems und es gilt $c^T s < c^T s^* = 0$ im Widerspruch zu s^* optimal.

„$\Rightarrow$“: Sei x^* nun Lösung des ersten Problems. Wenn $s^* = 0$ nicht optimal für das zweite Problem wäre, dann gibt es ein s mit $c^T s < 0$, $As = 0$ und $s_{\mathcal{A}(x^*)} \geq 0$. Wir betrachten nun den Strahl $x(t) = x^* + ts$ für $t \geq 0$. Es gilt $Ax(t) = 0$ und $x(t)_{\mathcal{A}(x^*)} \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Weiterhin gibt es wegen $x^*_{\mathcal{I}(x^*)} > 0$ aus Stetigkeitsgründen ein $\hat{t} > 0$ mit

$$x(t)_{\mathcal{I}(x^*)} \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq \hat{t}.$$

$x(\hat{t})$ ist also ein zulässiger Punkt des ersten Problems und es gilt $c^T x(\hat{t}) = c^T x^* + \hat{t} c^T s < c^T x^*$ im Widerspruch zur Optimalität von x^*.

b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$\min_x x_1 \quad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \geq 1$$

Das Problem ist offensichtlich unbeschränkt. Es gilt $c = (1, 0)^T$ und $A = (-1, -1)$. Sei nun x ein Punkt in dem die erste Nebenbedingung aktiv ist, z.B. $x = (1, 0)^T$, dann ist $A_{\mathcal{A}(x)} c = -1 \leq 0$ und damit $c \in T(X, x)$, x ist aber keine Lösung.