Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dipl.-Math. Florian Lindemann

1. Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2011/12)

Aufgabe 1.1 (Modellierung): **(ca. 5 Punkte)**

Ein Schweinemastbetrieb muss den Nährstoffbedarf der Schweine an vier verschiedenen Nährstoffen decken. Dafür stehen drei unterschiedliche Futtermittel (mit verschiedenen Einkaufspreisen) zur Verfügung, die in geeigneter Mischung verfüttert werden sollen.

a) Formulieren Sie das Problem, die entstehenden Ausgaben für die Futtermittel zu minimieren, als Optimierungsaufgabe, d.h. bringen Sie es in die Form

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \;\; g(x) \le 0,\; h(x) = 0$$

mit geeigneten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

b) Ist diese Optimierungsaufgabe linear, d.h. sind f, g und h affin lineare Funktionen?

Aufgabe 1.2 (Abstiegsrichtungen): **(ca. 3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zudem sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $s \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\nabla f(x)^T s < 0$. Zeigen Sie, dass es dann $\tau > 0$ gibt mit

$$f(x + \sigma s) < f(x) \qquad \text{für alle } \sigma \in (0, \tau].$$

Aufgabe 1.3 (Wiederholung: Taylorentwicklung): **(ca. 6 Punkte)**

a) Es sei eine quadratische Funktion $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) := \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix, $b \in R^n$ und $c \in \mathbb{R}$ ist. Berechnen Sie den Gradienten ∇q und die Hesse-Matrix $\nabla^2 q$ von q.

b) Zeigen Sie, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen werden kann, dass A symmetrisch ist. Wie sieht der Gradient und die Hesse-Matrix dann aus?

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T_q(x_0; x)$ von q im Punkt $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$.

d) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung $T_f^3(x_0; x)$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) := 2x_1^3 - 5x_1^2 + 3x_1 x_2 - 2x_2^2 + 9x_1 - 9x_2 - 9$$

an der Stelle $x_0 = (1, -1)^T$.

Abgabe: Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 26.10.2011, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.