Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dipl.-Math. Florian Lindemann

---

2. Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2011/12)

Aufgabe 2.1 (Optimales Design eines Gebäudes): (ca. 8 Punkte)
Ein quaderförmiges Gebäude soll optimal dimensioniert werden. Bezeichne l die Länge, b die Breite, h die Höhe (über Grund) und t die Tiefe (unter Grund) des Gebäudes. Der Bauherr stellt folgende Anforderungen, wobei zur Vereinfachung die Dicke der Wände und der Böden bzw. Decken vernachlässigt wird:

(1) Das Gebäude soll mindestens so lang, aber höchstens doppelt so lang wie breit sein.

(2) Die Länge l des Gebäudes darf 40 m nicht überschreiten.

(3) Die Höhe h des Gebäudes über Grund darf dessen Länge nicht unterschreiten.

(4) Alle Stockwerke sollen eine einheitliche Höhe von mindestens 3,50 m haben.

(5) Mindestens 10%, aber höchstens 25% des Gebäudes sollen unter der Erde liegen.

(6) Der Boden des Erdgeschosses soll ebenerdig sein.

(7) Die durch alle Stockwerke des Gebäudes bereitgestellte Bodenfläche soll in der Summe mindestens 10.000 m^2 betragen.

(8) Die durchschnittlichen jährlichen Heizkosten werden mit 100 Euro pro m^2 der über Grund liegenden Außenfläche des Gebäudes angesetzt. Die jährlichen Gesamtkosten für Heizung sollen 500.000 Euro nicht überschreiten.

Das Gebäude soll nun unter den angegebenen Bedingungen so dimensioniert werden, dass die Menge des für den Bau des Gebäudes auszuhebenden Erdreichs minimal ist.

a) Formulieren Sie dieses Problem als restringiertes Optimierungsproblem.

b) Bestimmen Sie einen zulässigen Punkt.

c) Beweisen Sie, dass eine optimale Lösung existiert (diese müssen Sie nicht angeben!).

Aufgabe 2.2 (Fehlende Abstiegsrichtungen): (ca. 6 Punkte)
Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) := y^2 - 3yx^2 + 2x^4.$$

a) Berechnen Sie die stationären Punkte von f.

b) Ausgehend von $(0,0)$ steigt die Funktion in jede Richtung an: Durch $\alpha_d(t) := td$ mit $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist eine Gerade durch $(0,0)$ und d gegeben. Zeigen Sie, dass für jedes d die Funktion $\phi_d(t) := f(\alpha_d(t))$ nach unten beschränkt ist und ein striktes lokales Minimum bei $t = 0$ hat.

c) Ist der Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum von f?

Aufgabe 2.3 (Folgen und zugehörige Funktionswertfolgen): (ca. 8 Punkte)
Es sei eine Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben sowie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie einen *kurzen* Beweis an:

a) Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^* \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*).$$

b) Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x^k = x^*.$$

c) Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein striktes globales Minimum und es gebe keine weiteren lokalen Minima. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x^k = x^*.$$

d) Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein globales Minimum, so dass für jede Folge $(y^k) \subset \mathbb{R}^n$ mit $f(y^k) \to f(x^*)$ gilt $\lim_{k\to\infty} y^k = x^*$. Dann ist x^* ein striktes globales Minimum.

e) Sei $(f(x^k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge und x^* ein Häufungspunkt von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert $(f(x^k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x^*)$.

f) Sei $(f(x^k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge und x^* ein Häufungspunkt von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x^*.

g) Die Niveaumenge $N_f(x^0)$ sei beschränkt. Dann besitzt $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt.

h) Die Niveaumenge $N_f(x^0)$ sei beschränkt und $(f(x^k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge. Dann besitzt $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt und es existiert ein $f^* \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f^*$.

Abgabe: Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 09.11.2011, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.