**Technische Universität München**
**Zentrum Mathematik**
**Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1**
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dipl.-Math. Florian Lindemann

## 3. Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2011/12)

**Aufgabe 3.1 (Konvexität): (ca. 6 Punkte)**

a) Begründen Sie kurz, dass der $\mathbb{R}^n$ konvex ist. Zeigen Sie, dass affin-lineare Funktionen $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex sind.

b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \|x\|$ konvex auf $\mathbb{R}^n$ ist. Kann eine Norm streng konvex sein?

c) Nun betrachten wir die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) := \|x\|_2^2$ konvex auf $\mathbb{R}^n$ ist, indem Sie die Skalarprodukteigenschaften nutzen um

$$(1-\lambda)g(x) + \lambda g(y) - g((1-\lambda)x + \lambda y) \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0,1],\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

zu zeigen. Ist $g$ streng konvex?

d) Lässt sich die in c) durchgeführte Rechnung auf andere Normen übertragen?

**Aufgabe 3.2 (Minima bei gleichmäßig konvexen Funktionen): (ca. 6 Punkte)**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar sowie $y \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten nun die Niveaumenge

$$N(y) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(y) \,\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $N(y)$ konvex ist.

b) Sei $f$ nun gleichmäßig konvex auf $N(y)$. Zeigen Sie, dass $N(y)$ kompakt ist.

c) Folgern Sie unter den Voraussetzungen von b), dass die Funktion $f$ ein globales Minimum besitzt.

d) Gilt diese Aussage auch, wenn $f$ nur streng konvex ist?

**Aufgabe 3.3 (Stationäre Punkte): (ca. 4 Punkte)**

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Wenn $x^*$ ein lokales aber kein globales Minimum von $f$ ist, dann besitzt $f$ neben $x^*$ einen weiteren stationären Punkt.

b) Verlassen wir nun den $\mathbb{R}^1$. Gilt die Aussage aus a) auch für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := e^{3y} - 3xe^y + x^3$?

**Aufgabe 3.4 (Multiple Choice):** **(ca. 5 Punkte)**

*Bewertung: -0.5/0/0.5 Punkte für falsche/keine/richtige Antwort. In der Gesamtwertung dieser Aufgabe können keine negativen Punkte erzielt werden, d. h. bei einer negativen Gesamtpunktzahl wird diese Aufgabe mit null Punkten bewertet.*

In dieser Aufgabe sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zudem bezeichne $\lambda_{\min}(M)$ den kleinsten und $\lambda_{\max}(M)$ den größten Eigenwert einer symmetrischen Matrix $M$.

a) Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Dann gilt $0 < \lambda_{\min}(M)||d||^2 \leq d^T M d \leq \lambda_{\max}(M)||d||^2$ für alle $d \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

b) Für eine Funktion $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $g$ auf $K$ ein Minimum annimmt, ist die Stetigkeit von $g$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

c) Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt: $x^*$ ist genau dann stationärer Punkt von $f$, wenn $\nabla f(x^*)^T h \leq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. **wahr** ☐ **falsch** ☐

d) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann stationärer Punkt von $f$, wenn er lokales Minimum oder lokales Maximum von $f$ ist. **wahr** ☐ **falsch** ☐

e) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ sei $\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) > 0$. Dann ist $f$ gleichmäßig konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

f) Gleichmäßig konvexe Funktionen sind strikt konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

g) Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ ist gleichmäßig konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

h) Wenn $f$ streng konvex ist, dann ist $\nabla^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

i) Ist $g: I \to \mathbb{R}$ konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist $g^2$ strikt konvex. **wahr** ☐ **falsch** ☐

j) Sei $n = 3$. Zudem sei $x$ kein stationärer Punkt und $s \in \mathbb{R}^n$ mit $s \neq 0$ ein Vektor, so dass der Winkel $\sphericalangle(s, -\nabla f(x)) < 90°$. Dann ist $s$ eine Abstiegsrichtung. **wahr** ☐ **falsch** ☐

Hinweis: Die Aufgabe 3.4 ist nicht relevant für den Notenbonus.

**Abgabe:** Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 23.11.2011, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.