Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dipl.-Math. Florian Lindemann

---

5. Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2011/12)

Aufgabe 5.1 (Armijoregel): (ca. 5 Punkte)
Wir betrachten das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 2.4.1.) mit stetig differenzierbarer Zielfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Suchrichtungen $s^k = -2^{-k}\nabla f(x^k)$.

a) Weisen Sie nach, dass jede Teilfolge von Suchrichtungen $(s^k)_K$ zulässig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Armijo-Regel für die oben genannten Suchrichtungen im Allgemeinen keine zulässigen Schrittweiten σ_k erzeugt. Verwenden Sie hierfür das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2}{8}, \quad \text{Startpunkt } x^0 > 0$$

und zeigen Sie, dass es keine zulässige Teilfolge $(\sigma_k)_K$ gibt.

Tipp: Führen Sie die Details in Beispiel 2.5.1 aus.

Aufgabe 5.2 (Gradientenverfahren in einem Schritt in Lösung): (ca. 5 Punkte)
Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) := c^T x + \frac{1}{2}x^T C x \tag{P}$$

wobei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix ist und $c \in \mathbb{R}^n$. Zur Minimierung nutzen wir ein allgemeines Abstiegsverfahren, wobei wir als Suchrichtungen jeweils

$$s^k := -\nabla f(x^k)$$

wählen und die Schrittweiten σ_k mit Hilfe der Minimierungsregel bestimmen.

a) Zeigen Sie, dass (P) eine eindeutige globale Lösung x^* hat und geben Sie diese an.

b) Sei nun der Startpunkt x^0 so gewählt, dass $x^0 - x^*$ ein Eigenvektor von C ist. Zeigen Sie, dass dann bereits $x^1 = x^*$.

c) Wir betrachten nun $n = 2$. Zeigen Sie, dass $x^0 - x^*$ genau dann ein Eigenvektor von C ist, wenn $x^0 - x^*$ senkrecht zur Höhenlinie in x^0 ist. Veranschaulichen Sie sich das Ergebnis!

Aufgabe 5.3 (Kriterien für die Zulässigkeit): **(ca. 4 Punkte)**
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und die Folgen (x^k), (s^k) sowie (σ_k) durch das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 2.4.1) erzeugt. Zeigen Sie:

a) Eine Teilfolge von Suchrichtungen $(s^k)_K$ ist zulässig, wenn mit einer monoton wachsenden Funktion $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, gilt:

$$-\nabla f(x^k)^T s^k \geq \phi(\|\nabla f(x^k)\|)\|s^k\| \quad \forall\, k \in K.$$

b) Die Schrittweitenteilfolge $(\sigma_k)_K$ ist zulässig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{-\nabla f(x^k)^T s^k}{\|s^k\|} \geq \varepsilon \quad \text{für unendlich viele } k \in K \\ \Longrightarrow \quad & f(x^k) - f(x^k + \sigma_k s^k) \geq \delta(\varepsilon) \quad \text{für unendlich viele } k. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4 (Multiple Choice): **(ca. 4 Punkte)**
Bewertung: -0.5/0/0.5 Punkte für falsche/keine/richtige Antwort.

In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stets eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Betrachte Alg. 2.4.1 mit Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ für f. Die Niveaumenge $N_f(x^0)$ sei beschränkt. Die Folge der Suchrichtungen und Schrittweiten sei jeweils zulässig. Dann ist mindestens ein stationärer Punkt auch Häufungspunkt der Folge (x^k). **wahr** ☐ **falsch** ☐

b) Betrachte Alg. 2.4.1 mit Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ für f. Falls die Folge (x^k) zwei Häufungspunkte x_1^* und x_2^* hat, so gilt $f(x_1^*) = f(x_2^*)$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

c) Betrachte Alg. 2.4.1 mit Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ für f. Die Niveaumenge $N_f(x^0)$ sei beschränkt. Dann konvergiert die Folge $(f(x^k))$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

d) Betrachte Alg. 2.4.1 mit Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ für f. Die Niveaumenge $N_f(x^0)$ sei beschränkt. Die Folge $(f(x^k))$ konvergiere. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \nabla f(x^k) = 0$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

e) Sei (s^k) eine durch Algorithmus 2.4.1 erzeugte Folge von Suchrichtungen mit $s^k = -\nabla f(x^k)/(k+1)$. Dann ist jede Teilfolge $(s^k)_K$ zulässig. **wahr** ☐ **falsch** ☐

f) Ist s^k im Punkt x^k eine Abstiegsrichtung und wird die Schrittweite σ_k mit Hilfe der Minimierungsregel bestimmt, so gilt $\nabla f(x^k + \sigma_k s^k)^T s^k = 0$. **wahr** ☐ **falsch** ☐

g) Wir wenden das Gradientenverfahren mit Armijoregel (Alg. 2.3.5) auf f an. Sei $\bar{x}$ ein Häufungspunkt von (x^k) und $(x^k)_K$ eine Teilfolge mit $(x^k)_K \to \bar{x}$. Dann gilt: Die Schrittweitenteilfolge $(\sigma_k)_K$ ist zulässig. **wahr** ☐ **falsch** ☐

h) Es sei (σ_k) eine Folge effizienter Schrittweiten. Dann gilt: Jede Teilfolge $(\sigma_k)_K$ ist zulässig. **wahr** ☐ **falsch** ☐

Hinweis: Die Aufgabe 5.4 ist nicht relevant für den Notenbonus.

Abgabe: Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 21.12.2011, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.