Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dipl.-Math. Florian Lindemann

6. Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2011/12)

Aufgabe 6.1 (Curry-Schrittweitenregel): (ca. 8 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Niveaumenge $N_f(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x^0)\}$ kompakt ist. Weiter sei $x \in N_f(x^0)$ und $s \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung von f in x. Die *Curry-Schrittweitenregel* berechnet $\sigma^* > 0$ als den kleinsten positiven stationären Punkt der Funktion $\phi(\sigma) := f(x + \sigma s)$:

$$\sigma^* := \min\{\sigma > 0 \mid \nabla f(x + \sigma s)^T s = 0\}.$$

a) Zeigen Sie die Wohldefiniertheit der Curry-Regel. Gehen Sie hierzu zunächst davon aus, dass kein positiver stationärer Punkt von ϕ existiert und verwenden Sie den Mittelwertsatz, um einen Widerspruch zur Kompaktheit der Niveaumenge $N_f(x^0)$ zu erzeugen. Zeigen Sie dann weiter, dass es unter den positiven stationären Punkten von ϕ tatsächlich einen kleinsten gibt.

b) Zeigen Sie nun mit dem Zwischenwertsatz, dass ein kleinstes $0 < \hat{\sigma} < \sigma^*$ existiert mit $\nabla f(x + \hat{\sigma} s)^T s = \frac{1}{2} \nabla f(x)^T s$.

c) Zeigen Sie: $f(x + \sigma^* s) - f(x) \le \frac{\hat{\sigma}}{2} \nabla f(x)^T s$.

d) Nutzen Sie aus, dass $N_f(x^0)$ kompakt und ∇f stetig ist, um zu zeigen, dass ein von x und s unabhängiges $\delta(\epsilon) > 0$ existiert mit $\|\hat{\sigma} s\| > \delta(\epsilon)$, falls

$$-\frac{1}{2} \frac{\nabla f(x)^T s}{\|s\|} \ge \epsilon.$$

e) Verwenden Sie nun (c) und (d), um zu zeigen, dass jede Schrittweitenteilfolge $(\sigma_k)_K$, die durch Algorithmus 2.4.1 mit Startpunkt x^0 und der Curry-Schrittweitenregel erzeugt wird, zulässig ist.
Tipp: Schauen Sie sich den Beweis von Satz 2.5.2 bzw. 2.5.5 an!

Aufgabe 6.2 (Eine Variante des Fletcher-Reeves-CG-Verfahrens): (ca. 7 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und nach unten beschränkte Funktion. In dieser Aufgabe wollen wir die globale Konvergenz eines speziellen Abstiegsverfahrens untersuchen. Dabei wählen wir in jeder Iteration die Suchrichtung

$$s^k = \begin{cases} d^k, & \text{wenn } \|d^k\| \le c\|\nabla f(x^k)\| \text{ und } k > 0 \\ -\nabla f(x^k), & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c > 1$, $d^k := -\nabla f(x^k) + \beta_k s^{k-1}$ und $\beta_k := \|\nabla f(x^k)\|^2 / \|\nabla f(x^{k-1})\|^2$. Zur Bestimmung der Schrittweite verwenden wir die **strenge** Powell-Wolfe Schrittweitenregel mit $\eta < 1/2$. Bei der strengen Powell-Wolfe-Schrittweitenregel fordert man zusätzlich zu den beiden Powell-Wolfe-Bedingungen, dass σ_k auch die Ungleichung

$$-\nabla f(x^k + \sigma_k s^k)^T s^k \geq \eta \nabla f(x^k)^T s^k$$

erfüllt.[1]

a) Zeigen sie mittels Induktion die Ungleichungen

$$-\sum_{j=l}^{k} (\eta)^{j-l} \leq \frac{\nabla f(x^k)^T s^k}{\|\nabla f(x^k)\|^2} \leq -2 + \sum_{j=l}^{k} (\eta)^{j-l},$$

wobei $l \in \{0, \ldots, k\}$ der größte Index ist, für den $s^l = -\nabla f(x^l)$ gilt. Verwenden Sie dabei die Eigenschaften der Schrittweite.

b) Verwenden Sie Teil a), um zu zeigen, dass s^k eine Abstiegsrichtung ist.

c) Folgern Sie weiter, dass jede Teilfolge $(s^k)_K$ der Suchrichtungsfolge zulässig ist.

d) Zeigen Sie nun, dass das Verfahren global konvergent ist im Sinne von Satz 2.4.8 für jede Startiterierte $x^0 \in \mathbb{R}^n$, für die $N_f(x^0)$ kompakt ist.

Aufgabe 6.3 (Multiple Choice): (ca. 3.5 Punkte)

Bewertung: -0.5/0/0.5 Punkte für falsche/keine/richtige Antwort.

In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stets eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Die (unskalierte) Armijo-Regel kann zu Schrittweiten führen, die größer als Eins sind.
wahr ☐ **falsch** ☐

b) Die Powell-Wolfe-Regel kann zu Schrittweiten führen, die größer als Eins sind.
wahr ☐ **falsch** ☐

c) Schrittweiten, welche die Powell-Wolfe-Bedingungen erfüllen, erfüllen auch die Armijo-Bedingung, wobei jeweils das gleiche $\gamma \in (0, 1/2)$ gegeben sei. **wahr** ☐ **falsch** ☐

d) Wir wenden ein allgemeines Abstiegsverfahren (Algorithmus 2.4.1), das zur Schrittweitenbestimmung die Armijoregel verwendet, auf f an. Dann gilt: Die erzeugte Schrittweitenfolge (σ_k) ist zulässig. **wahr** ☐ **falsch** ☐

e) Die Powell-Wolfe-Regel garantiert, dass die Richtungsableitung von f in Richtung s^k im Punkt x^k kleiner ist als die Richtungsableitung von f in Richtung s^k im Punkt x^{k+1}.
wahr ☐ **falsch** ☐

f) Algorithmus 2.5.3 kann keine Schrittweiten generieren, die aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind.
wahr ☐ **falsch** ☐

g) Seien σ_-^* und σ_+^* die in Algorithmus 2.5.3 erzeugten Werte von σ_- und σ_+ vor dem Eintritt in Schritt 4. Dann generiert der Algorithmus 2.5.3 eine Schrittweite, die im Intervall $[\sigma_-^*, \sigma_+^*]$ liegt. **wahr** ☐ **falsch** ☐

Hinweis: Die Aufgabe 6.3 ist nicht relevant für den Notenbonus.

---

[1] Unter den Voraussetzungen für die Existenz einer Powell-Wolfe Schrittweite kann auch die Existenz einer solchen Schrittweite sichergestellt werden. Dies muss nicht gezeigt werden.

Abgabe: Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 18.01.2012, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.

Das gesamte Optimierungs-Team wünscht Ihnen ein frohes neues Jahr!