Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dipl.-Math. Florian Lindemann

---

7. Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2011/12)

Aufgabe 7.1 (Konvergenzraten): **(ca. 5 Punkte)**

a) Sei $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge mit Grenzwert $\bar{x}$. Zeigen Sie folgende Implikationen:

$$(x^k) \text{ konvergiert q-linear mit Rate } \gamma_{\mathrm{q}} \Longrightarrow (x^k) \text{ konvergiert r-linear mit Rate } \gamma_{\mathrm{r}} = \gamma_{\mathrm{q}}$$
$$(x^k) \text{ konvergiert q-superlinear} \Longrightarrow (x^k) \text{ konvergiert r-superlinear}$$
$$(x^k) \text{ konvergiert q-quadratisch} \Longrightarrow (x^k) \text{ konvergiert r-quadratisch}$$

b) Konstruieren Sie eine Folge (x^k), welche die folgende Implikation widerlegt:

$$(x^k) \text{ konvergiert r-quadratisch} \Longrightarrow (x^k) \text{ konvergiert q-linear mit Rate } \gamma_{\mathrm{q}}$$

c) Seien $(x^k) \subset \mathbb{R}$ und $(y^k) \subset \mathbb{R}$ zwei Folgen und $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$, so dass $\begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix}$ gegen $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ q-superlinear konvergiert. Zeigen Sie, dass dann (x^k) r-superlinear gegen $\bar{x}$ und (y^k) r-superlinear $\bar{y}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass man im Allgemeinen nicht erwarten kann, dass (x^k) und (y^k) jeweils q-superlinear konvergieren.

Aufgabe 7.2 (Das lokale Newtonverfahren): **(ca. 4 Punkte)**

a) Sei $f(x) := |x|^p$, $p > 2$ und $x^0 > 0$. Wir betrachten das lokale Newtonverfahren für Optimierungsprobleme (Algorithmus 2.6.6) zur Bestimmung des globalen Minimums $x^* = 0$ von f mit Startpunkt x^0. Zeigen Sie, dass die Newtoniteration q-linear gegen x^* konvergiert und geben Sie die Rate an. Zeigen Sie weiter, dass die Konvergenz nicht q-superlinear ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum lokalen Konvergenzsatz aus der Vorlesung?

b) Sei nun

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/|x|), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f eine C^∞-Funktion ist mit $f'(0) = f''(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das lokale Newtonverfahren zur Minimierung von f für alle $0 < x^0 < 1/3$ streng monoton fallend gegen $x^* = 0$ konvergiert. Begründen Sie ferner, dass keine q-lineare Konvergenz vorliegt.
Hinweis: Bringen Sie die Newtoniteration auf die Form $x^{k+1} = \varphi(x^k)x^k$. Was folgt daraus für den/die Häufungspunkt/e von (x^k)?

Aufgabe 7.3 (Vereinfachtes Newtonverfahren): (ca. 6 Punkte)
Es sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Das *vereinfachte Newtonverfahren* verläuft wie das Newtonverfahren, (Algorithmus 2.6.1) nur wird zur Berechnung des Schrittes $s^k \in \mathbb{R}^n$ anstelle der Newtongleichung die folgende vereinfachte Newtongleichung gelöst:

$$F'(x^0)s^k = -F(x^k).$$

Die neue Iterierte ergibt sich dann wie beim Newtonverfahren als $x^{k+1} = x^k + s^k$. Es sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle von F, in der $F'(\bar{x})$ invertierbar ist.

Ziel dieser Aufgabe ist es nachzuweisen, dass das vereinfachte Newtonverfahren für jeden Startpunkt x^0 aus einer geeigneten Umgebung $B_\varepsilon(\bar{x})$ von $\bar{x}$ q-linear gegen $\bar{x}$ konvergiert.

Hinweis: Schauen Sie sich die entsprechenden Umformungen im Beweis des lokalen Konvergenzsatzes für das Newtonverfahren, Satz 2.6.5, an.

a) Es sei $C := \|F'(\bar{x})^{-1}\| > 0$. Zeigen Sie für hinreichen kleines $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\|F'(x)^{-1}\| \leq 2C \quad \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \sup_{x,y \in B_\varepsilon(\bar{x})} \|F'(x) - F'(y)\| \leq \frac{1}{3C}.$$

b) Zeigen Sie nun, dass gilt:

$$\begin{aligned} x^{k+1} - \bar{x} &= F'(x^0)^{-1} \int_0^1 \Big(F'(x^0) - F'(\bar{x} + t(x^k - \bar{x}))\Big)\,(x^k - \bar{x})\,dt \\ &\leq 2C\|x^k - \bar{x}\| \sup_{t\in[0,1]} \|F'(x^0) - F'(\bar{x} + t(x^k - \bar{x})\|. \end{aligned}$$

c) Folgern Sie mit a) aus b) per Induktion über k, dass für alle k gilt: $\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq {}^2/_3\|x^k - \bar{x}\|$.

d) Begründen Sie, warum dieses Verfahren bei geeigneter Implementierung, im Allgemeinen deutlich weniger Rechenzeit pro Iteration benötigt als Algorithmus 2.6.1.

Aufgabe 7.4 (Abstand zur Lösung bei q-superlinearer Konvergenz): (ca. 3 Punkte)
Sei $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, die q-superlinear gegen x^* konvergiert. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k - x^*\|} = 1.$$

(In der Nähe der Lösung ist also $\|x^{k+1} - x^k\| \approx \|x^k - x^*\|$.)

Abgabe: Bitte geben Sie bis **Mittwoch, den 01.02.2012, 11 Uhr** Ihre Lösungen im Briefkasten im Untergeschoss ab.

Hinweis zum Notenbonus: Blatt 7 ist das letzte Übungsblatt. Im gesamten Semester gab es 20 Aufgaben, die für den Notenbonus relevant sind. Jeder Student, der 15 Aufgaben laut Korrektur 'sinnvoll bearbeitet' hat, bekommt den Notenbonus.