Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Optimierung, M1
Prof. Dr. Michael Ulbrich
Dr. Florian Lindemann

---

0. Übungsblatt zu Nichtlineare Optimierung: Grundlagen (WS 2013/14)

Aufgabe 0.1: **(ca. 2 Punkte)**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Weisen Sie nach, dass die Probleme

$$\max f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X \qquad \text{und} \qquad \min -f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X$$

die gleichen Optimalpunkte $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ als Lösung besitzen. Mit anderen Worten: Jedes Maximierungsproblem lässt sich als Minimierungsproblem behandeln.

Aufgabe 0.2: **(ca. 6 Punkte)**

Es sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ die durch

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

von der Vektornorm $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrizennorm.

a) Zeigen Sie die Verträglichkeit, d. h. $\|Ay\| \le \|A\|\|y\|$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

b) Zeigen Sie die Submultiplikativität, d. h. $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

c) Sei nun λ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $|\lambda| \le ||A||$.

d) Kennen Sie eine Vektornorm, so dass für die induzierte Matrizennorm und alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$||A|| = |\lambda_{\max}(A)|,$$

wobei $\lambda_{\max}(A)$ der betragsgrößte Eigenwert von A ist?

Aufgabe 0.3: **(ca. 4 Punkte)**

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x, s \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel den Zusammenhang

$$\partial_s f(x) = \nabla f(x)^T s.$$

b) Es gelte $\nabla f(x)^T s < 0$. Zeigen Sie, dass es dann $\tau > 0$ gibt mit

$$f(x + \sigma s) < f(x) \quad \forall \sigma \in (0, \tau].$$

Aufgabe 0.4: **(ca. 5 Punkte)**
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Begründen Sie für $\|d\| \to 0$ folgende qualitativen Zusammenhänge:

a) Falls f total differenzierbar ist, gilt

$$f(x+d) - f(x) = \nabla f(x)^T d + o(\|d\|).$$

b) Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt

$$f(x+d) - f(x) = \nabla f(x)^T d + O(\|d\|^2).$$

c) Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt

$$f(x+d) - f(x) = \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + o(\|d\|^2).$$

Aufgabe 0.5: **(ca. 6 Punkte)**
Gegeben sei eine Menge von k Punkten in der Ebene. Zu finden sei eine Kreisscheibe mit minimalem Radius, die alle diese Punkte enthält.

a) Formulieren Sie dieses Problem als restringiertes Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion und quadratischen Nebenbedingungen.

b) Beweisen Sie, dass dieses Problem eine Lösung besitzt.

- Die Aufgaben dieses Präsenzübungsblattes werden in den ersten Tutorübungen bearbeitet, besprochen und *nicht* korrigiert.