TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. Boris von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 1

Übungen zur Optimierung 3

H1. Optimales Design eines Gebäudes (ca. 10 Punkte)

Ein quaderförmiges Gebäude soll optimal dimensioniert werden. Bezeichne l die Länge, b die Breite, h die Höhe (über Grund) und t die Tiefe (unter Grund) des Gebäudes. Der Bauherr stellt folgende Anforderungen, wobei zur Vereinfachung die Dicke der Wände und der Böden bzw. Decken vernachlässigt wird:

(1) Das Gebäude soll mindestens so lang, aber höchstens doppelt so lang wie breit sein.

(2) Die Länge l des Gebäudes darf 40 m nicht überschreiten.

(3) Die Höhe h des Gebäudes über Grund darf dessen Länge nicht unterschreiten.

(4) Alle Stockwerke sollen eine einheitliche Höhe von mindestens $3{,}50$ m haben.

(5) Mindestens 10%, aber höchstens 25% des Gebäudes sollen unter der Erde liegen.

(6) Der Boden des Erdgeschosses soll ebenerdig sein.

(7) Die durch alle Stockwerke des Gebäudes bereitgestellte Bodenfläche soll in der Summe mindestens 10.000 m^2 betragen.

(8) Die durchschnittlichen jährlichen Heizkosten werden mit 100 Euro pro m^2 der über Grund liegenden Außenfläche des Gebäudes angesetzt. Die jährlichen Gesamtkosten für Heizung sollen 500.000 Euro nicht überschreiten.

Das Gebäude soll nun unter den angegebenen Bedingungen so dimensioniert werden, dass die Menge des für den Bau des Gebäudes auszuhebenden Erdreichs minimal ist.

a) Schreiben Sie dieses Problem in Form eines restringierten Optimierungsproblems.

b) Besitzt das Optimierungsproblem zulässige Punkte?

c) Besitzt das Problem eine optimale Lösung?

Für die folgende Aufgaben wird der Begriff der Konvexität benötigt.

Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte aus C auch ihre Verbindungsstrecke in C liegt. Genauer: C ist konvex, falls gilt:

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in C \quad \forall\, \alpha \in [0,1], \;\; \forall\, x, y \in C.$$

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Die Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls gilt:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad \forall\, \alpha \in [0,1], \;\; \forall\, x, y \in C.$$

— Bitte wenden —

H2. Quasikonvexe Funktionen (ca. 7 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ heißt *quasikonvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in C$ und $\alpha \in (0, 1)$

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

ist.

Eine quasikonvexe Funktion f heißt *streng quasikonvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in C$, mit $f(x_1) \neq f(x_2)$ und $\alpha \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

(a) Zeigen Sie: Eine Funktion ist genau dann quasikonvex, wenn die Niveaumenge $N_f(\hat{x}) := \{x \in C : f(x) \leq f(\hat{x})\}$ in jedem Punkt $\hat{x}$ konvex ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede konvexe Funktion auch quasikonvex ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine streng quasikonvexe Funktion an, die nicht konvex ist (Zeichnung genügt!).

(d) Zeigen Sie:

1. Ist f quasikonvex und $x^* \in C$ striktes lokales Minimum von f, dann ist x^* ein striktes globales Minimum von f. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass aus f quasikonvex und $x^* \in C$ lokales Minimum i.A. nicht folgt, dass x^* globales Minimum von f ist.
2. Ist f streng quasikonvex und $x^* \in C$ lokales Minimum von f, dann ist x^* ein globales Minimum von f. Folgt auch, dass x^* ein striktes Minimum ist?

H3. Quadratische Funktionen (ca. 5 Punkte)

Eine quadratische Funktion sei durch

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ q(x) := \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$$

gegeben, mit einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie den Gradient und die Hessematrix von q.

(c) Sei A positiv definit und $x^* := -A^{-1}b$. Zeigen Sie, dass x^* das globale Minimum von q ist.

Abgabe: Mittwoch, 25.04.2007 bis 14:00 Uhr im Briefkasten *Optimierung 3* im Untergeschoss