TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 11

Übungen zur Optimierung 3

H35. Geometrie von Nebenbedingungen (ca. 5 Punkte)

Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^n$ sei ein Punkt mit $g(x^*) = 0$ und $\nabla g(x^*) \neq 0$. Aus der Analysis ist bekannt, dass dann die Menge

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\ g(x) = 0\}$$

in einer Umgebung von x^* eine Hyperfläche ist.

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\nabla g(x^*)$ im Punkt x^* senkrecht auf H steht, d.h.:
Für jede C^1-Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(I) \subset H$ und $\gamma(0) = x^*$ gilt $\nabla g(x^*) \perp \gamma'(0)$.

b) Begründen Sie, dass x^* auf dem Rand der Menge $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\ g(x) \leq 0\}$ liegt und dass der Vektor $\nabla g(x^*)$ im Punkt x^* aus X herauszeigt, d.h. $x^* + t\nabla g(x^*) \notin X$ für kleine $t > 0$.

c) Veranschaulichen Sie die Überlegungen aus a) und b) anhand einer Skizze für das Beispiel $g : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_2 - x_1^3$, $x^* = (1, 1)^T$. Zeichnen Sie hierzu H, X und x^* und tragen Sie den Vektor $\nabla g(x^*)$ im Punkt x^* an.

H36. KKT-Bedingungen und Constraint Qualifications (ca. 4 Punkte)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min \quad f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0 \tag{$*$}$$

mit C^1-Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine lokale Lösung von $(*)$. Unter einer geeigneten Voraussetzung (*Constraint Qualification*) kann man zeigen, dass dann die *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen* gelten:

Es gibt einen *Lagrange-Multiplikator* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ mit

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\mu^* = 0.$$

a) Finden Sie ein möglichst einfaches Problem der Form $(*)$, das eine globale Lösung x^* besitzt, in der die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen nicht gelten.

b) Bezeichne X den zulässigen Bereich von $(*)$. Geben Sie für das Beispiel aus a) den Tangentialkegel $T(X, x^*)$ und den linearisierten Tangentialkegel $T_l(h, x^*)$ an und zeigen Sie, dass die Abadie Constraint Qualification verletzt ist.

– bitte wenden –

H37. Slater-Bedingung (ca. 3 Punkte)

Gegeben ist das (konvexe) Optimierungsproblem

$$\min\ f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0,\ h(x) = 0 \tag{P}$$

mit konvexen C^1-Funktionen $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ und einer affin linearen Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Die *Slater-Bedingung* lautet: Es gibt einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $h(y) = 0$ und $g_i(y) < 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Zeigen Sie, dass die Slater-Bedingung eine Constraint Qualification für jeden zulässigen Punkt von (P) ist.

H38. Komplementaritäts-Nebenbedingung (ca. 5 Punkte)

Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ g(x) \leq 0\}$ mit $g(x) = (-x_1, -x_2, x_1 x_2)$ der zulässige Bereich eines Optimierungsproblems.

a) Zeigen Sie, dass in keinem zulässigen Punkt $x \in X$ die (MFCQ) gilt

b) Für welche $x \in X$ ist die (ACQ) erfüllt (mit Begründung)?

Abgabe: Mittwoch, 04.07.2007 bis 14:15 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss
Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.