TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 12

Übungen zur Optimierung 3

H39. KKT-Bedingungen für Trust-Region-Probleme (ca. 5 Punkte)

Sei $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(s) = g^T s + \frac{1}{2} s^T H s$, quadratisch mit $g \in \mathbb{R}^n$ und $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für $\Delta > 0$ betrachten wir das Trust-Region-Problem

$$\min\ q(s) \quad \text{u.d.N.} \quad \|s\| \leq \Delta. \tag{TR}$$

Sei nun $s^* \in \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung von (TR).

a) Zeigen Sie, dass bei geeigneter Umformulierung der Nebenbedingung $\|s\| \leq \Delta$ im Punkt s^* die KKT-Bedingungen gelten und dass diese die folgende Form haben:

   Es gibt $\lambda \geq 0$ mit

   (1) $(H + \lambda I)s^* = -g$.

   (2) Entweder $\|s^*\| = \Delta$ oder $\|s^*\| < \Delta$ und $\lambda = 0$.

b) Zeigen Sie, dass in s^* die notwendigen Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung gelten und geben Sie diese an. Inwiefern sind diese schwächer als die in **H33** bewiesene Charakterisierung von s^*?

H40. Hinreichende Bedingungen 2. Ordnung (ca. 5 Punkte)

Wir betrachten das Optimierungsproblem (P) mit $n = 2$, $m = 1$,

$$\min f(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad g(x) = x_1^2 - x_2 \leq 0.$$

a) Weisen Sie nach, daß $x^* = 0$ ein KKT-Punkt von (P) ist und bestimmen Sie den zugehörigen Lagrange-Multiplikator λ^*.

b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_a(g, x^*)$ und den Kegel $T_+(g, x^*, \lambda^*)$.

c) Zeigen Sie, daß die Matrix $\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ auf dem Tangentialraum $T_a(g, x^*)$ positiv definit ist.

d) Begründen Sie, daß (CQ2) in (x^*, λ^*) erfüllt ist, daß aber die notwendigen Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung nicht gelten. Folgern Sie, daß x^* keine lokale Lösung von (P) sein kann. Verifizieren Sie dies, indem Sie eine Folge $(x^k) \subset X$ mit $x^k \to x^*$ und $f(x^k) < f(x^*)$ angeben.

– bitte wenden –

H41. Penaltyverfahren (ca. 7 Punkte)

Gegeben sei ein quadratisches Optimierungsproblem

$$\min f(x) := c^T x + \frac{1}{2} x^T C x \quad \text{u.d.N. } h(x) := Hx = 0 \tag{QP}$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, einer Matrix $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mit vollem Zeilenrang und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^n$.

a) Finden Sie zu festem $\alpha > 0$ das Minimum $x(\alpha)$ der quadratischen Penaltyfunktion

$$P_\alpha(x) := f(x) + \frac{\alpha}{2} \|h(x)\|^2.$$

Tipp: Verwenden Sie die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel aus **H28**.

b) Berechnen Sie $x^* = \lim_{\alpha \to \infty} x(\alpha)$.

c) Zeigen Sie, dass x^* Lösung von (QP) ist.

H42. Exakte Penalty Funktionen (ca. 5 Punkte)

Gegeben sei das restringiertes Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{P2}$$

mit f stetig differenzierbar und $X \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten Penalty-Funktionen der Form

$$P_\alpha^r(x) = f(x) + \alpha r(x),$$

wobei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist mit

$$r(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \qquad\qquad r(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei nun x^* ein lokales Minimum von (P2) mit $\nabla f(x^*) \neq 0$.

Zeigen Sie: Ist $P_{\hat{\alpha}}^r$ exakt in x^*, dann ist r in x^* nicht differenzierbar.

Abgabe: Mittwoch, 11.07.2007 bis 14:15 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss

Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.