TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 13

Übungen zur Optimierung 3

H43. Barriere-Verfahren (ca. 6 Punkte)

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min\ f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \le 0. \tag{P}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Modifizieren Sie den Beweis von Satz 3.2.3 der Vorlesung, um folgendes zu zeigen:

Seien f und g stetig differenzierbar und das Innere $X^\circ = \{x\,;\ g(x) < 0\}$ des zulässigen Bereichs sei nicht leer mit $\overline{X^\circ} = X$. Die Folge $(\alpha_k) \subset (0, \infty)$ konvergiere streng monoton fallend gegen Null und das Barriere-Verfahren erzeuge die Folge (x^k) (von deren Existenz wir ausgehen). Wir definieren die Folgen (λ^k) gemäß

$$\lambda_i^k = \frac{-\alpha_k}{g_i(x^k)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Dann gilt:

a) Ist $(x^k, \lambda^k)_K$ eine konvergente Teilfolge von (x^k, λ^k) mit Grenzwert (x^*, λ^*), dann ist x^* eine globale Lösung von (P) und (x^*, λ^*) ist ein KKT-Paar von (P).

b) Sei x^* ein Häufungspunkt von (x^k) und $(x^k)_K$ eine gegen x^* konvergente Teilfolge. Weiter sei der Punkt x^* regulär. Dann konvergiert die Folge $(x^k, \lambda^k)_K$ gegen ein KKT-Paar von (P) und x^* ist eine globale Lösung von (P).

H44. Ein unzulässiges SQP-Teilproblem (ca. 6 Punkte)

Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^2}\ -x_1 - x_2 \\ &\text{u.d.N.}\ \ g(x) := -x \le 0, \quad h(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich und die Höhenlinien der Zielfunktion.

b) Bestimmen Sie die Lösung von $(*)$ und die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren.

c) Sei nun $x^k = (-1/2, -1/2)^T$. Skizzieren Sie die Nebenbedingungen des SQP-Teilproblems und zeigen Sie, dass der zulässige Bereich des Teilproblems leer ist.

H45. Maratos-Effekt (ca. 8 Punkte)

Zur Globalisierung des SQP-Verfahrens für (P) betrachten wir die ℓ_1-Penalty-Funktion

$$P_\alpha^1(x) = f(x) + \alpha\|h(x)\|_1, \quad \alpha > 0.$$

Um schnelle lokale Konvergenz zu garantieren, sollte in der Nähe der Lösung der volle SQP-Schritt d^k eine Abnahme der Penalty-Funktion liefern, d.h.

$$P_\alpha^1(x_k + d^k) < P_\alpha^1(x^k).$$

N. Maratos hat als erster festgestellt, daß dies leider manchmal nicht gilt.

– bitte wenden –

Wir betrachten hierzu das Problem (P)

$$f(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1, \quad h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

a) Geben Sie die Lösung x^* dieses Problems und den zugehörigen Lagrange-Multiplikator μ^* an.

b) Der SQP-Schritt d^k ist die Lösung des SQP-Teilproblems

$$\min_d \ \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k) d \quad \text{u.d.N.} \quad h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d = 0. \qquad \text{(QP)}$$

Zeigen Sie, ohne d^k zu berechnen, daß $d^k \neq 0$ für alle $x^k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm(1,0)^T\}$ gilt.

c) Sei (d^k, μ_{qp}^k) ein KKT-Paar von (QP). Zeigen Sie durch Taylorentwicklung und Verwendung der KKT-Bedingungen, daß gilt:

$$f(x^k + d^k) - f(x^k) = f(x^k)^T d^k + 2\|d^k\|^2 = \mu_{qp}^k h(x^k) - 2(1 + \mu^k)\|d^k\|^2,$$
$$h(x^k + d^k) - h(x^k) = \|d^k\|^2.$$

d) Sei nun $x^k \neq \pm(1,0)^T$ ein zulässiger Punkt von (P) und es gelte $\mu^k < -1$. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$f(x^k + d^k) > f(x^k), \quad |h(x^k + d^k)| > |h(x^k)| = 0.$$

Begründen Sie, daß daraus $P_\alpha^1(x^k + d^k) > P_\alpha^1(x^k)$ folgt.

Abgabe: Mittwoch, 18.07.2007 bis 14:15 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss

Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.