TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 3

Übungen zur Optimierung 3

H8. Minimierungsregel und Armijo-Bedingung (ca. 4 Punkte)

Sei $f(x) = c^T x + \frac{1}{2}x^T Cx$, $c \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, eine streng konvexe quadratische Funktion. Weiter sei $s \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\sigma^* = \arg\min_{\sigma\geq 0} f(x + \sigma s)$$

bezeichne die durch die Minimierungsregel gelieferte Schrittweite.
Zeigen Sie, dass $\sigma = \sigma^*$ für alle $\gamma \in (0, 1/2]$ der Armijo-Bedingung

$$f(x + \sigma s) - f(x) \leq \sigma\gamma\nabla f(x)^T s$$

genügt, für alle $\gamma > 1/2$ aber nicht.

H9. Ein-Schritt-Konvergenz des Gradientenverfahrens (ca. 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Methode des steilsten Abstiegs mit der Minimierungsregel (siehe Aufgabe 8) angewandt auf eine strikt konvexe quadratische Funktion

$$f(x) := c^T x + \frac{1}{2}x^T Cx, \quad c \in \mathbb{R}^n,\ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

das Minimum $x^* \in \mathbb{R}^n$ in einem Schritt findet, wenn der Anfangspunkt $x_0 \neq x^*$ so gewählt ist, dass die Strecke $x_0 - x^*$ parallel zu einem Eigenvektor von C liegt.

H10. Konvergenzgeschwindigkeit des Gradientenverfahrens (ca. 6 Punkte)

Für $a > 1$ definieren wir die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + ax_2^2$.

a) Bestimmen Sie für den Startpunkt $x^0 = (a, 1)^T$ die durch das Gradientenverfahren mit der Minimierungsregel

$$f(x^k + \sigma_k s^k) = \min_{\sigma\geq 0} f(x^k + \sigma s^k)$$

erzeugte Folge (x^k) und zeigen Sie, dass für alle $k \geq 0$ gilt:

$$\|x^{k+1} - x^*\| = \frac{a-1}{a+1}\,\|x^k - x^*\|,$$

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 (f(x^k) - f(x^*)),$$

wobei $x^* = 0$ das globale Minimum von f ist.

b) Drücken Sie die Konvergenzrate $\dfrac{a-1}{a+1}$ mit Hilfe der Konditionszahl

$$\kappa(\nabla^2 f(x)) = \frac{\lambda_{\max}(\nabla^2 f(x))}{\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x))}$$

der Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x)$ aus.
Wie verhält sich die Konvergenzrate für $\kappa(\nabla^2 f(x)) \to \infty$?

H11. Implementierung des Gradientenverfahrens (ca. 7 Punkte)

Implementieren Sie das Gradientenverfahren aus der Vorlesung (Algorithmus 2.3.5) mit der Armijo-Schrittweitenregel in MATLAB. Teilen Sie dazu das Verfahren in zwei Funktionen auf:

1. Eine Funktion `Armijo`, die bei gegebenen Daten die Schrittweite berechnet und zurückgibt:
   `function [sigma] = Armijo(f, gfx, x, s, beta, gamma)`
   mit Eingabeparameter

   f: Ein Funktionshandle auf die Funktion f (vgl. hierzu `feval` in der Matlab Hilfe)

   gfx: Der Gradient ausgewertet an der Stelle `x`

   x: Die aktuelle Iterierte

   s: Die Suchrichtung

   beta, gamma: Die Parameter der Armijo-Suche.

2. Eine Funktion `GradientenVerf`, welche die Funktion `Armijo` verwendet und folgendes Interface hat:
   `function [x, steps] = GradientenVerf(f, gf, x0, eps, maxsteps)`
   Die Eingabeparameter sind:

   f,gf: Ein Funktionshandle auf die Funktion f bzw. den Gradienten von f

   x0: Der Startpunkt x^0

   eps: Die Abbruchtoleranz für die Gradientennorm: $\|\nabla f(x_k)\|_2 \leq \varepsilon$

   maxsteps: Die maximale Anzahl von Schritten die das Verfahren durchführen soll

Testen Sie Ihre Implementierung am Beispiel der *Rosenbrockfunktion*

$$f(x) := 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

mit Startpunkt $x^0 = (-1.2, 1)^T$ und Paramtern maxsteps $= 10000$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 10^{-4}$. Lassen Sie das Verfahren für verschiedene ε laufen (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}). Für $\varepsilon = 10^{-3}$ sollte das Verfahren ca. 5231 Iterationen benötigen und den Punkt $x = (0.9992, 0.9984)$ zurückgeben.

Geben Sie bitte Ihre Quellcodes und die Ausgabe ab, schicken Sie zusätzlich Ihre Matlab-Quellcodes an `vloesch@ma.tum.de`.

Abgabe: Mittwoch, 9.05.2007 bis 14:00 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss
Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.