TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 4

Übungen zur Optimierung 3

H12. Alternative Formulierung eines konvexen Minimierungsproblems (ca. 4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare konvexe Funktion. Wir betrachten das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie, dass Lösungen von $(*)$ auch Lösungen von

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) := \|\nabla f(x)\|_2^2 \qquad (**)$$

sind. Besitzt das Problem $(*)$ eine Lösung, dann sind alle globalen Lösungen von $(**)$ auch Lösungen von $(*)$.

(b) Sei nun zusätzlich f eine strikt konvexe quadratische Funktion. Erläutern Sie mit Hilfe des Satzes 2.3.8 (Konvergenzgeschwindigkeit des Gradientenverfahrens), warum es i.A. nicht sinnvoll ist, das Verfahren des steilsten Abstiegs auf das Problem $(**)$ anstelle von $(*)$ anzuwenden.

H13. Beispiel für unzulässige Schrittweiten durch die Armijo-Regel (ca. 6 Punkte)

Wir betrachten das allgemeine Abstiegsverfahren mit stetig differenzierbarer Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Suchrichtungen $s^k = -2^{-k}\nabla f(x^k)$.

a) Weisen Sie nach, daß die Suchrichtungen s^k zulässig sind.

b) Zeigen Sie, daß die Armijo-Regel für die oben genannten Suchrichtungen im allgemeinen keine zulässigen Schrittweiten erzeugt. Verwenden Sie hierfür das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2}{8}, \quad \text{Startpunkt } x^0 > 0.$$

c) Wodurch wird die Unzulässigkeit der Schrittweiten verursacht?

H14. Lipschitz-Stetigkeit auf Kompakta (ca. 3 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann F auf jedem konvexen Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist mit Konstante $L := \max_{x \in K} \|F'(x)\|$. In Formeln:

$$\|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in K.$$

– bitte wenden –

H15. Kriterien für die Zulässigkeit von Suchrichtungen und Schrittweiten (ca. 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und (x^k), (s^k) sowie (σ_k) durch das allgemeine Abstiegsverfahren (Alg. 2.4.1) erzeugt. Zeigen Sie:

a) Die Suchrichtungsfolge (s^k) ist zulässig, wenn mit einer streng monoton wachsenden Funktion $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(0) = 0$, gilt:

$$-\nabla f(x^k)^T s^k \geq \phi(\|\nabla f(x^k)\|)\|s^k\| \quad \forall\, k \geq 0.$$

b) Die Schrittweitenfolge (σ_k) ist zulässig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{-\nabla f(x^k)^T s^k}{\|s^k\|} \geq \varepsilon \quad \text{für unendlich viele } k \\ \Longrightarrow \quad & f(x^k) - f(x^k + \sigma_k s^k) \geq \delta(\varepsilon) \quad \text{für unendlich viele } k. \end{aligned}$$

c) Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann sind die folgenden Suchrichtungen zulässig:

Mit $\alpha_1 \in (0, 1)$, $\alpha_2 > 0$, $p > 0$ und $M_k := \nabla^2 f(x^k)$ setze

$$d^k = \begin{cases} -M_k^{-1}\nabla f(x^k) & \text{falls } M_k \text{ positiv definit ist,} \\ -\nabla f(x^k) & \text{sonst} \end{cases}$$

und wähle die Suchrichtung

$$s^k = \begin{cases} d^k & \text{falls } -\nabla f(x^k)^T d^k \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2\|\nabla f(x^k)\|^p\}\|\nabla f(x^k)\|\,\|d^k\|, \\ -\nabla f(x^k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Tip: Verwenden Sie a).

d) Es gelte $x^k \to x^*$ und x^* erfülle die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung. Dann gilt mit der Suchrichtungswahl aus c):

$$s^k = -M_k^{-1}\nabla f(x^k) \quad \text{für fast alle } k,$$

d.h. das Verfahren geht über in das Newton-Verfahren.

Abgabe: Mittwoch, 16.05.2007 bis 14:00 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss

Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.