TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 5

Übungen zur Optimierung 3

H16. Zulässigkeit der Powell-Wolfe Schrittweiten (ca. 5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^0 \in R^n$ ein Startpunkt, so dass die Niveaumenge

$$N_f(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq f(x^0)\}$$

kompakt ist. Weiter sei $(x_k)_K$ eine Teilfolge, die durch Algorithmus 2.4.1 unter Verwendung der Powell-Wolfe Schrittweitenregel erzeugt wurden. Zeigen Sie, dass die Schrittweitenfolge $(\sigma_k)_K$ zulässig ist.

H17. Abstand zur Lösung bei q-superlinearer Konvergenz (ca. 3 Punkte)

Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge die q-superlinear gegen ein x^* konvergiert. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x^*\|} = 1$$

ist, mit anderen Worten in der Nähe der Lösung ist $\|x_{k+1} - x_k\| \approx \|x_k - x^*\|$.

H18. Problemfälle für das Newton-Verfahrens (ca. 8 Punkte)

a) Sei $f(x) = |x|^p$, $p > 2$, und $x^0 > 0$. Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Bestimmung des globalen Minimums $x^* = 0$ von f mit Startpunkt x^0.

   Zeigen Sie, dass die Newton-Iteration q-linear gegen x^* konvergiert und geben Sie die Rate an. Zeigen Sie weiter, dass die Konvergenz nicht q-superlinear ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum lokalen Konvergenzsatz aus der Vorlesung.

b) Sei nun $f(x) = \exp(-1/|x|)$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$, sonst. Zeigen Sie, dass f C^2 ist mit $f'(0) = f''(0) = 0$ und dass das Newton-Verfahren zur Minimierung von f für alle $0 < x^0 < 1/3$ streng monoton fallend gegen $x^* = 0$ konvergiert. Begründen Sie weiter, dass die q-Konvergenzrate schlechter als linear ist.

   Tip: Bringen Sie die Iteration auf die Form $x^{k+1} = \phi(x^k)x^k$. Was folgt daraus für den/die Häufungspunkt/e von (x^k)?

H19. Banach-Lemma (ca. 6 Punkte)

a) Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\|M\| < 1$. Zeigen Sie, dass die Matrix $I - M$ invertierbar ist mit dem Inversen

$$(I - M)^{-1} = S := \sum_{k=0}^{\infty} M^k$$

   und dass für die Norm gilt:

$$\|S\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

   Tipp: Zeigen Sie, dass S eine konvergente Reihe ist ($\|S - S_m\| \to 0$ mit S_m m-te Partialsumme) und verwenden Sie die geometrische Reihe.

– bitte wenden –

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|A^{-1}B\| < 1$. Zeigen Sie, dass die Matrix $(A + B)$ invertierbar ist und es gilt

$$\|(A+B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B\|},$$

$$\|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|\|A^{-1}B\|}{1 - \|A^{-1}B\|}.$$

Tipp: Verwenden Sie Teil a) mit der Matrix $M = -A^{-1}B$.

Abgabe: Mittwoch, 23.05.2007 bis 14:15 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss

Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.