TU München
Lehrstuhl Mathematische Optimierung
Prof. Dr. M. Ulbrich
Dipl.-Math. B. von Loesch

Sommersemester 2007

Blatt 8

Übungen zur Optimierung 3

H26. Ortung eines Walfisches (ca. 6 Punkte)

Zur Abgrenzung eines Wal-Schutzgebietes, müssen wir die unbekannten Standorte des Tieres bestimmen. Dazu benutzen wir $m \geq 4$ Mikrofone, die sich an uns bekannten Stellen $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^3$ im Wasser befinden. Ein Wal stößt nun zu einem Zeitpunkt t^*, den wir nicht kennen, an dem uns unbekannten Ort $x^* \in \mathbb{R}^3$ einen lauten Ruf aus. Dieser wird von den m Mikrofonen zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_m > t^*$ empfangen.

Wir gehen idealisierend davon aus, dass sich der Ozean in Ruhe befindet und dass die Schallgeschwindigkeit im Salzwasser $c = 1500$ m/s ist.

a) Benutzen Sie die Beziehung $c \times$ Schalllaufzeit $=$ Entfernung von der Schallquelle, um ein Gleichungssystem
$$F(t, x) = 0$$
mit $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^m$ herzuleiten, das durch (t^*, x^*) gelöst wird. Die Abhängigkeit der Funktion F von x_i und t_i ist hierbei nicht explizit angegeben.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $F'(t, x)$.

c) Begründen Sie, dass die im Zusammenhang mit dem Gauß-Newton-Verfahren relevante Matrix $F'(t^*, x^*)^T F'(t^*, x^*)$ nahezu singulär ist, wenn der Abstand der Mikrofone untereinander sehr klein ist im Vergleich zur Entfernung des Wales von den Mikrofonen.

d) Die Mikrofone seien so platziert, dass $F'(t^*, x^*)$ vollen Rang hat. Begründen Sie, dass wir mit lokal q-superlinearer Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens gegen x^* rechnen können, wenn unsere Messungen exakt sind (und somit voraussichtlich mit schneller linearer Konvergenz, wenn die Messfehler klein sind).

H27. SR1-Formel bei quadratischen Problemen (ca. 6 Punkte)

Wir betrachten das lokale SR1-Quasi-Newton Verfahren:

0. Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, H_0 symmetrisch und invertierbar.

Für $k = 0, \dots$:

1. Falls $\nabla f(x^k) = 0$, STOP.
2. Berechne s^k durch Lösen des linearen Gleichungssystems
$$H_k s^k = -\nabla f(x^k)$$
3. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$ und $y^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$.
4. Setze
$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y^k - H_k s^k)(y^k - H_k s^k)^T}{(y^k - H_k s^k)^T s^k}$$

– bitte wenden –

Sei $f(x) := c^T x + \frac{1}{2} x^T C x$ eine quadratische Funktion mit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $c \in \mathbb{R}^n$. Seien $(x^k), (s^k)$ und (y^k) Folgen, die durch den obenstehenden Algorithmus angewandt auf die Funktion f erzeugt wurden. Weiter sei $(y^k - H_k s^k)^T s^k \neq 0$ für alle k. Zeigen Sie:

a)
$$H_k s^j = y^j \quad \text{für } j = 0, \dots, k-1$$

b) Wenn die ersten n Suchrichtungen linear unabhängig sind, gilt $H_n = C$.

c) Das Verfahren findet spätestens im n-ten Schritt das Minimum.

H28. Sherman-Morrison-Woodbury-Formel (ca. 7 Punkte)

a) Gegeben seien die Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ seien invertierbar. Zeigen Sie, dass die Matrix $M := A + USV^T$ (M wird als Rang-m-Modifikation von A bezeichnet) genau dann invertierbar ist, wenn $W := S^{-1} + V^T A^{-1} U$ invertierbar ist, und dass im Fall der Existenz von M^{-1} die folgende Formel gilt:
$$M^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U W^{-1} V^T A^{-1}.$$
Tip: Verifizieren Sie die Formel, indem Sie mit M multiplizieren.

b) Übertragen Sie nun a) auf den Fall einer Rang-1-Modifikation $M := A + uv^T$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, um zu zeigen: M ist invertierbar genau dann, wenn $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ gilt, und in diesem Fall ist
$$M^{-1} = \left(I - \frac{A^{-1} u v^T}{1 + v^T A^{-1} u} \right) A^{-1}.$$

c) Verwenden Sie die Formel aus Teil (b) um die zur symmetrischen Rang 1-Formel H^{SR1} (vgl. **H27** Schritt 4 mit $s^k = d^k$) zugehörige inverse Aufdatierungsformel
$$H_{k+1}^{-1} = B_{k+1} = B_k + \frac{(d^k - B_k y^k)(d^k - B_k y^k)^T}{(d^k - B_k y^k)^T y^k}$$
herzuleiten.

Abgabe: Mittwoch, 13.06.2007 bis 14:15 Uhr im Briefkasten Optimierung 3 im Untergeschoss

Bitte schreiben Sie neben **Namen** und **Matrikelnummer** auch die **Nummer Ihrer Übungsgruppe** auf die Abgabe.